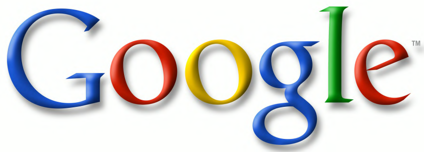
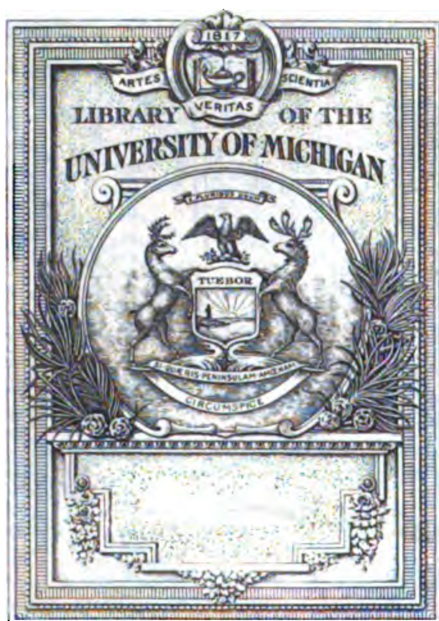

Google


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE





ALGEBRÆ
GEOMETRIA PROMOTÆ
ELEMENTA

Conscripta ad usum

FAUSTINÆ
PIGNATELLI

Principis Colubranensis, & Tolvensis Ducatus Hæredis.

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

Nicolò di

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Professore

TOM. II.



Excudebat Felix Carolus Mosca sumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI MDCCXXXVII.



ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER II.

De Problematum Resolutione Speciosa.

1. Ræcedenti libro eam Algebræ partem enodavimus, quę maxime omnium negotium non leve Tironibus facessit. Tota enim in tradendis regulis calculi litteralis, seu speciosi occupatur. Unde sterilis admodum, ac salebrosa se prodit; nec ullo oblectamento ad se animum trahit. Et quamquam ejus difficultatem, varietate rerum, de quibus in ea disseruimus, nonnihil lenire curavimus; attamen usque eo planior fieri non potuit, ut non fatigentur discentium animi, & ad fastidium usque non torqueantur.

2. Jam labor ille omnis, quem secum ferunt regulæ calculi litteralis, satis superque rependitur studio alterius hujus Algebræ partis, quam præsenti libro pertractandam aggredimur. Propositum est enim hic nobis ostendere, qua demum ratione, mediante calculo litterali, problemata mathematica resolvantur. Unde, mira fa-

cilitate, ac solertia, qua calculi ejus beneficio problematum mathematicorum resolutio obtinetur, cognita, ac explorata; liquido patebit, non esse sterilem ac infructuosam, sed maxime uberem, ac fœcundam partem Algebræ priorem de calculo litterali, ac specioso.

3. Ut omnes aliarum disciplinarum quæstiones, sic & problemata mathematica duplici methodo resolvi possunt, synthesi, & analysi. Prior adhibetur, quum ex quibusdam principiis certis, ac indubitatis ad ejus, quod quæritur, cognitionem, componendo, devenimus. Posterior in subsidium advocatur, quum vicissim ex eo, quod quæritur, tamquam concesso, eo usque progredimur, resolvendo, donec in aliquid incidimus, jam cognitum, ac exploratum. Unde illa methodus compositionis; hæc methodus resolutionis vulgo etiam vocitatur.

4. Ex duabus hisce methodis, quibus quæstionum resolutio potest obtineri, quin magis proficua sit analysis, quam synthesis; nemo in dubium vertit. Ut enim nobis constet, unde veritas aliqua sit deducenda; maxima animi contentione opus est. Sed, quo data quædam veritas nos ducat; facile quidem percipi potest. Hinc communiter analysis quidem ad inveniendum; synthesis autem ad docendum propria judicatur: indeque est, ut prior methodus inventionis, posterior methodus doctrinæ pariter appelletur.

5. Sed ipsi etiam Recentiores Mathematici, quum calculi litteralis ope problema aliquod resolvendum sibi proponunt, non alia methodo utuntur, quam analysi. Supponunt enim, velut

lut jam factum, aut inventum, id, quod in problemate quæritur. Tum, impositis nominibus singulis quantitatibus, quæ in eo occurrunt, expendunt omnes conditiones, in eodem problemate appositas; & eousque illas evolvunt, ac inter se mutuo comparant, donec æquationem inveniant inter quantitates datas, & eam, ad quam problema revocatur.

6. Verum quidem est, quod, inventa æquatione ista, non adhuc problematis resolutio obtinetur. Sed, ea comparata, haud arduum erit, rem ad umbilicum perducere. Neque enim aliud deinde requiritur, quam ut primo reducatur æquatio illa ad sedem suam propriam: quo nempe ipsius problematis gradus cognitus fiat; tum, ut eadem illa æquatio, subinde reducta, in suas, ut ajunt, radices resolvatur. Nam, inventis radicibus hisce, non modo problema resolvitur, sed omnes ejus casus, seu solutiones possibiles nobis innotescunt.

7. Id quum ita sit, liquet, unicum medium, quo utitur Algebra in resolutione problematum, esse æquationis artificium. Unde in theoria æquationum expendenda vires omnes, oportet, intendamus; & ea propter libri hujus, non secus ac præcedentis, quatuor futuræ erunt sectiones. In prima enim methodum resolvendi problemata per analysim, tam generatim, quam per varia exempla specialia, ex universa Mathesi deprompta, ostendemus; in secunda agemus de natura, & proprietatibus æquationum; in tertia de reductione æquationum ad propriam sedem; & in quarta demum de æquationum in suas radices resolutione.

SECTIO I.

De Resolutione Problematum per Analysim.

8. VEteres Mathematicos in problematum resolutione, non tam synthesim, quam analysim adhibuisse; testatur Pappus Alexandrinus, & pleraque ipsorum monumenta abunde confirmant. Nec sane tantam veritatum segetem ad nos demandare potuissent, nisi iis adjumento fuisset analysis, quæ propria ad inveniendum deprehenditur *. Et quamquam veritates illas synthetica methodo ut plurimum nobis proponant; id tamen factum, quia norunt, propriam methodum ad docendum esse synthesim, & non analysim.

* art. 4.

9. Hinc nimis oscitanter nonnulli in vulgus efferunt, non fuisse in usu apud Veteres Mathematicos analysim, & Recentiores primum, excogitato calculo litterali, eam usurpasse. Nam, quod hac in re Recentioribus ferri debet acceptum, huc ferme redit, quod ope ejus calculi usum analysis in problematum resolutione faciliorem, præstantioremque reddiderunt. Mediante enim calculo illo Mathesim totam, velut quandam speciem Arithmetices, effecerunt. Unde facultatem resolvendi problemata mathematica adeo quidem facilitarunt, ut nihil amplius in ea desiderari posse videatur.

10. Etsi autem propositum sit nobis ostendere, quomodo resolvantur problemata mathemati-

ti-

tica per analyſim, adhibito calculo litterali; non abs re tamen fore putamus, paucis prius indicare, quo pacto ipſi Veteres in reſolutione problematum analyſim adhibebant. Neque enim uſque adeo calculus nobis arridet, ut plane exules velimus ex Matheſi eas argumentationes, quæ continua deductionum ſerie inſtituuntur. Nam, etſi commendandus eſt calculus, ad augendam mentis capacitatem; nihilo tamen minus, pro ejus robore, ac firmitudine, nec etiam ordinata, ac connexa illa Veterum ratiocinia negligi debent.

CAPUT I.

Veterum analyſis oſtenſa, ac exemplis illuſtrata.

11. UT omnes quantitatum ſpecies deſignabant Veteres, vel per longitudines linearum, vel numeris adhibitis; ſic ex universa Matheſi duas potiſſimum diſciplinas viribus omnibus excolendas ſibi propoſuerunt; Geometriam, & Arithmeticam. Quomodo autem reſolvebant Veteres per analyſim quæſtiones arithmeticas; abunde id conſtat ex Diophanto, qui de hujuſmodi quæſtionibus opus integrum conſcripſit, in treſdecim libros partitum: licet ex iis ſex tantum priores ad noſtras manus pervenerint, & reliqui ſeptem perierint temporis injuria.

12. Nimirum diſcimus ex Diophanto, Veteres in reſolutione quæſtionum arithmeticarum

adhibuisse analysim eadem fere ratione, ac ea utuntur Recentiores; nec aliud discriminis occurrere, quam quod ii dumtaxat numerum quæsitum, ejusque potestates symbolis quibusdam designabant, numeros autem datos, ac cognitos propriis suis characteribus exprimebant. Ex quo fiebat, ut ipsorum solutiones iis tantum casibus essent accomodatæ, in quibus quæstiones propositæ erant.

13. Qua vero ratione iidem Veteres in quæstionibus geometricis analysim ad praxim revocabant; id sane ex omnibus priscæ ætatis Geometris, tum potissimum ex Pappo, & Apollonio eruere licet. Etsi enim adhuc dubitent Recentiores, num in earum quæstionum resolutione aliquam calculi speciem usurpaverint Veteres; audacter tamen affirmare non veremur, usum analysis in Geometria talem omnino fuisse apud eos, qualem in ipsorum operibus cernitur.

I. Analysis Veterum geometrica summatim explicatur.

14. QUum Veteres per analysim problematis alicujus geometrici resolutionem aggrediebantur, duobus hisce se continebant. Primo nempe ponebant, velut jam factum, aut inventum id, quod in problemate quærebatur. Deinde, resolvendo, eousque progrediebantur, suaque ratiocinia promovebant, donec in aliquid incidissent, quod qua fieri, aut inveniri posset ratione, jam cunctis cognitum esset, ac exploratum. Et quidem in positione nullo erat opus artificio; maximo autem opus erat in institu-

tuen-

tuenda resolutione, & ratiociniorum serie promovenda. Plane vero in retam ardua hanc artem potissimum adhibebant.

15. Nimirum primo animo revolvebant figuram, ex ipsa problematis positione natam; & quæ essent ejus accidentia, quæve exinde consequerentur, sedulo expendebant. Si eorum contemplatione nihil, quod ad rem faceret, assequebantur; alias in figura lineas ducebant, quibus eam resolvebant, velut in partes, & ad perlustrandas partes istas animum convertebant. Quod si ope istarum partium nec adhuc erant in portu, lineas alias superaddebant, quas multiplicabant, usque donec optatum finem essent consecuti.

16. Neque vero in ducendis lineis istis temere, ac inconsiderate se gerebant. Curabant enim, subinde eas ducere, ut per earum nexus, seu relationes ex una in aliam veritatem continuo progredi possent. Et quoniam linearum relationes ex triangulorum similitudine maxime se produnt; in id potissimum operam dabant, ut triangulis similibus figuram instruerent. Quem in finem subinde ducebant lineas illas, ut essent aliis, vel perpendiculares, vel parallelæ, aut etiam, ut datos quosvis angulos cum rectis aliis efficerent; quum triangulorum similitudo non aliunde, quam ex æqualitate angulorum, dignoscatur.

17. Pro assequenda autem angulorum æqualitate, non modo ad vulgata illa theoremata de parallelis, & de recta, vel super aliam incidente, vel aliam utcumque secante; sed ad circulorum affectiones sedulo animum appellabant: nempe, quod anguli, existentes in eodem circuli segmen-

mento, inter se sunt æquales; quod quadrilaterorum, in circulo inscriptorum, anguli oppositi duos rectos adæquant; & quod angulus, sub tangente, & secante contentus, æqualis est ei, qui in altera circuli portione reperitur.

18. Etsi enim in figura, ex ipsa problematis positione nata, nullus circulus appareat; fieri tamen potest, ut in eo aliquis lateat, transiens, non modo per tria, sed per quatuor puncta data. Si enim ad duo data puncta habeantur inclinatæ, tum binæ rectæ ex puncto tertio, tum aliæ binæ ex puncto quarto, quæ æquales angulos contineant; circulus, transiens per puncta duo priora, & punctum tertium, transibit etiam per quartum. Et similiter, si habeatur quadrilaterum, in quo anguli oppositi duos rectos adæquent; circulus, transiens per vertices trium suorum angulorum, transibit etiam per verticem quarti.

19. Sæpe autem evenit, ut duæ illæ lineæ, quarum relatione opus est, non reperiantur, aut in eodem triangulo, aut etiam in triangulis similibus. Et in isto casu, interpositis lineis aliis, resolvebant Veteres earum rationem in plures alias, quas deinde, triangulorum similium ope, cum rationibus aliis comparantes, cui illa esset æqualis, tandem comperiebant. Sed lineas istas intermedias non sine consilio eligebant; nam eas adhibebant, quæ latera essent triangulorum similium, & ad optatum scopum collimarent.

20. In comparandis porro singulis linearum relationibus, omnes arguendi formas, quæ super proportionibus institui possunt, animo præsentes habebant. Et quia proportionalitas trium, aut

aut quatuor rectarum eruitur quoque ex æqualitate unius rectanguli cum quadrato, aut rectangulo alio; theoremata de potentiis linearum maximo etiam adjumento eis erant. Resolvebant enim, tum rectangula, cum quadrata in suas partes; & mutua earum partium comparatione instituta, eo usque progrediebantur, donec alicubi æqualitas substitisset.

21. Hac igitur ratione resolvebant Veteres per analysim problemata geometrica. Sed, analysi feliciter ad exitum perducta, facili quidem negotio eadem problemata componebant, & synthetica methodo eorum solutiones edocebant. Jam enim per analysim, ponentes, velut jam factum, aut inventum id, quod in problemate quærebatur, eousque progrediebantur, donec in aliquid incidissent, cujus constructio, aut inventio cunctis cognita esset, ac explorata. Quare vicissim, assumentes, quod postremo eis obtulit analysis, & ordinantes secundum naturam ea antecedentia, quæ illic consequentia erant, tandem ad quæsiti finem synthetice perveniebant.

II. Analysis Veterum geometricæ exemplum primum.

20. EXplicata summatim analysi Veterum geometrica, demus modo ejusdem analysis exempla nonnulla, ex Geometria plana deprompta. Et primum quidem exemplum sit illud problema, quod resolvendum sibi proponit Euclides propositione decima libri quarti suorum Elementorum: scilicet, æquicrure triangu-

gulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim sit duplus anguli verticalis. Ponatur
FIG.1. ergo jam factum, sitque ABC triangulum quæsitum, ita, ut tam angulus ABC, quam angulus ACB duplus sit anguli verticalis BAC.

23. Sane ex sola positione trianguli nihil adhuc erui potest. Itaque, quum quisque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis, secemus bifariam aliquem eorum, puta ACB, per rectam CD, ipsi AB occurrentem in D. Fient ergo æquales inter se duo anguli DAC, ACD; & consequenter erit AD ipsi CD æqualis. Porro autem, quum totus angulus ACB, sive ABC æqualis fiat duobus DAC, ACD, atque his æqualis sit etiam angulus exterior BDC; erunt duo anguli ABC, BDC æquales inter se; adeoque recta CD, non modo ipsi AD, verum etiam ipsi BC æqualis erit.

24. Hinc, si nota esset longitudo ipsius AD nullo negotio problema solveretur. Nam, descripto circulo centro A, & intervallo AB, satis foret, aptare intra hunc circulum rectam BC, ipsi AD æqualem. Demus itaque operam, ut cognita fiat longitudo ipsius AD. Quem in finem consideremus ulterius, quod, bisecto angulo ACB per rectam CD, æquales fiunt inter se anguli duo BCD, DAC. Quare, si per tria puncta A, C, D circulum ducamus; plane necesse est, ut recta BC sit tangens circuli hujus. Unde, quia BA secat eundem circulum in punctis D, & A; necesse est quoque, ut quadratum ex BC sit æquale rectangulo ABD.

25. Quum ergo ostensæ sint æquales duæ AD, BC; erunt etiam æqualia quadrata, quæ

fiunt

fiunt ex ipsis : proindeque, ficuti BC quadratum prodiit æquale rectangulo ABD, sic eidem rectangulo ABD erit pariter æquale quadratum, quod fit ex AD. Quare habebitur longitudo ipsius AD, secando rectam AB ita quidem in puncto D, ut rectangulum, quod fit ex tota AB, & parte una BD, sit æquale quadrato partis alterius AD: quod qua fieri possit ratione, jam docuit Euclides propositione undecima libri secundi suorum Elementorum.

26. Analysi propositi problematis, more Veterum, instituta, videamus modo, quomodo illud per synthesim componi debeat. Sit ergo AB latus unum trianguli isoscelis construendi. Dividatur illud subinde in D, ut rectangulum ABD sit æquale quadrato, quod fit ex AD. Aptetur deinde in circulo, descripto centro A, intervalloque AB, recta BC, ipsi AD æqualis. Et, juncta recta AC, fiet ABC triangulum isosceles quæsitum. Ostendetur id vero, invertendo ratiocinium, pro analysi institutum.

27. Nimirum, quum rectæ BC, AD ex constructione sint æquales; erunt pariter æqualia quadrata, quæ fiunt ex ipsis. Unde, sicuti AD quadratum factum est æquale rectangulo ABD; sic eidem rectangulo ABD erit etiam æquale quadratum, quod fit ex BC: & propterea, quia recta BC subinde incidit in circulum, transeuntem per tria puncta A, D, C, ut quadratum ejus sit æquale rectangulo, quod fit ex secante tota BA, & portione, extra circulum existente BD; erit recta BC tangens illius circuli.

28. Hinc, siquidem jungatur CD, fiet propter tangentem angulus BCD æqualis angulo

BAC;

BAC; adeoque, apposito communi angulo ACD, erit totus angulus ACB, vel ABC æqualis duobus angulis DAC, ACD. Sed duobus hisce angulis æqualis est etiam angulus exterior BDC. Itaque duo anguli ABC, BDC æquales erunt inter se; & consequenter recta BC ipsi CD æqualis erit. Unde, quum fiant etiam æquales rectæ AD, CD, erit angulus ACD æqualis angulo DAC; & propterea totus angulus ACB, vel ABC duplus erit ejusdem anguli DAC.

III. *Analysis Veterum geometricæ exemplum secundum.*

29. Secundum exemplum, pro illustranda Veterum analysi, esto sequens problema; dato triangulo ABC, ex angulo ejus verticali A ad basim BC inclinare rectam, cujus quadratum ad rectangulum, sub basis segmentis comprehensum, datam habeat rationem. Ponatur jam factum, sitque AD recta inclinanda, ita, ut data sit ratio, quam habet quadratum ex AD ad rectangulum BDC. FIG. 2.

30. Quoniam AD quadratum ad rectangulum BDC rationem habet compositam ex AD ad BD, & ex AD ad CD; demus primo operam, ut composita hæc ratio ad simplicem revocetur. Hunc in finem circa triangulum ABC describatur circulus, & protrahatur recta AD usque donec cum circumferentia hujus circuli conveniat ad partem alteram in E.

31. Ob circulum ergo erit rectangulum BDC æquale rectangulo ADE; adeoque quadratum ex AD ad rectangulum BDC habebit ean-

eandem rationem, quam idem AD quadratum habet ad rectangulum ADE. Sed AD quadratum ad rectangulum ADE est in eadem ratione, quam habet AD ad DE. Quare erit quoque, ut AD quadratum ad rectangulum BDC, ita AD ad DE.

32. *Illa* itaque composita ratio, quam habet AD quadratum ad rectangulum BDC, revocata est ad simplicem istam, quam habet AD ad DE. Unde, sicuti data est ratio *illa*, sic etiam dabitur ratio ipsius AD ad DE. Hinc vero nihil adhuc habetur, quod ad propositum faciat. Neque enim nobis constat, quomodo intra circulum ABC aptari possit recta AE, ita, ut data sit ratio segmentorum ejus AD, DE.

33. Pergendum est ergo ulterius: quem in finem per punctum E ducatur recta EF, ipsi BC parallela, quae conveniat cum AC in F. Jamque, ob parallelas istas, erit, ut AD ad DE, ita AC ad CF; adeoque etiam ratio ipsius AC ad CF data erit. Plane vero, producere AC usque in F, donec AC ad CF datam obtineat rationem; id factu est possibile, nec ullam habet difficultatem,

34. Componetur itaque propositum problema in hunc modum. Extendatur AC usque in F, ita, ut AC ad CF sit in data *illa* ratione. Tum, descripto circulo circa triangulum ABC, agatur per punctum F recta FE, ipsi CB parallela, quae circumferentiam ejus circuli secet in E. Ducatur denique a puncto A ad punctum E recta AE. Et portio ejus AD erit recta quaesita.

35. Ostendetur id vero, invertendo ratiocinium, quod eo nos duxit. Nimirum, quum

in

in triangulo AEF ducta sit recta CD, ipsi F
parallela; erit, ut AC ad CF, ita AD ad D
Sed AD est ad DE, ut AD quadratum ad re
ctangulum ADE. Quare erit, ex æquali, u
AC ad CF, ita quadratum ex AD ad rectangu
lum ADE.

36. Quia autem, propter circulum, æquali sunt inter se rectangula duo ADE, BDC; eri quadratum ex AD ad rectangulum ADE, ut est idem AD quadatum ad rectangulum BDC. Unde, rursus ex æquali, erit, ut AC ad CF, ita quadratum ex AD ad rectangulum BDC: & propterea, sicuti AC ad CF ex constructione est in data illa ratione, ita in eadem data ratione erit etiam AD quadratum ad rectangulum BDC.

37. Obiter notari potest hoc loco, problematis hujus duas dari posse solutiones; quandoquidem recta FE, ducta per punctum F, ipsi CB æquidistanter, potest in duobus punctis occurrere circuli circumferentiæ. Interim duæ illæ solutiones possunt quandoque coire in unam, si scilicet eadem illa recta FE fiat circuli tangens. Nec reticendum, quod utraque solutio evadit impossibilis, quum recta FE, nec tangit, nec secat circulum.

38. Pendent hæc omnia ex quantitate datæ rationis. Si enim G sit punctum, quod bisecat arcum BEC, & juncta AG, ipsi BC occurrente in H, data ratio major sit ea, quam habet AH ad HG; problema duarum semper solutionum erit capax. Quod si vero ei sit æqualis, unica erit problematis solutio. Ac demum, si eadem illa ratione sit minor, problema solutu impossibile erit.

39.

39. Notari hic etiam potest, quod, si recta, ex angulo verticali ad basim inclinanda, duci debeat extra triangulum, eadem analysis locum habet, & eadem pariter compositio. Unicum discrimen, quod inter utrumque casum occurrit, est, quod CF in casu secundo cadit ad partem contrariam. Unde etiam, pro determinanda problematis possibilitate, secandus est bifariam arcus BAC.

IV. *Analysis Veterum geometricæ exemplum tertium.*

40. UT Veterum analysis geometrica magis patefiat, proponamus nobis resolvendum hoc aliud problema: datis in circumferentia circuli ABD duobus punctis E, & F, determinare in eadem circumferentia punctum tertium, ita, ut rectæ, quæ exinde ducuntur ad puncta illa, abscindant ex diametro, positione data, AB portionem, quæ ab ipso circuli centro C sit secta bifariam. FIG. 3.

41. Ponatur jam factum, sitque D punctum quæsitum: adeo nempe, ut ductis rectis DE, DF, diametro AB occurrentibus in G, & H, sit intercepta diametri portio GH secta bifariam in centro C. Et quoniam, demisso super EF perpendiculo CK, propter circulum etiam EF bisecatur in K; erit, ut EK ad KF, ita GC ad CH: ex qua tamen analogia nihil adhuc habetur, quod ad propositum faciat.

42. Itaque ducatur ulterius per punctum E recta EM, diametro AB parallela, quæ conveniat cum DF in M, & cum DC producta in N.

Quumque similia fiant, tam triangula DCG, DNE, quam triangula DCH, DNM; erit in eadem ratione rectarum DC, DN, tam GC ad EN, quam CH ad NM. Quare erit, ut GC ad ad EN, ita CH ad NM; & permutando, ut GC ad CH, ita EN ad NM. Erat autem, ut GC ad CH, ita EK ad KF.. Itaque erit ex æquali, ut EK ad KF, ita EN ad NM.

43. Hinc siquidem puncta K, & N jungantur per rectam KN, parallelæ erunt rectæ duæ KN, FM: proindeque erit angulus EKN æqualis angulo EFD. Jam vero, producta DN in O, & juncta EO, fit angulus EOD æqualis eidem angulo EFD. Quare duo anguli EKN, EON æquales erunt inter se: & propterea, circulus, transiens per tria puncta E,N,K, transibit etiam per quartum O. Unde anguli KON, KEN erunt inter se pariter æquales.

44. Et quoniam rectæ EM, AB ex constructione sunt parallelæ, si producatur FE usque donec conveniat cum BA in L; erit angulus KEN æqualis angulo KLC. Quare, quum anguli duo KOC, KLC inter se fiant æquales; circulus, transiens per tria puncta C, K, O, transibit etiam per quartum L. Unde, juncta LO, fiet angulus COL æqualis angulo CKL. Est autem angulus CKL rectus ex constructione. Itaque rectus erit pariter angulus COL; ideoque LO circulum tanget in O.

45. Eo igitur nos duxit analysis, ut siquidem ex puncto quæsito D agatur diameter DO, & puncta L, & O jungantur per rectam LO, contingat circulum in O recta ista LO. Unde synthetice resolvetur problema in hunc modum.

Jun-

Jungantur puncta E, & F per rectam EF, quæ producatur, usque donec conveniat cum diametro AB in L. Ducatur deinde ex puncto isto L tangens ad circulum LO. Et recta OD, ducta per centrum C, dabit punctum quæsitum D.

46. Et sane, factis antecedentibus, quæ in analysi consequentia fuere, haud difficile id erit ostendere. Positis namq; omnibus, ut supra, quum recti sint anguli CKL, COL; erunt in ejusdem circuli circumferentia quatuor puncta C, K, O, L: proindeque erit angulus KOC æqualis angulo KLC. Sed, propter parallelas CL, NE, angulus KLC æqualis est angulo KEN. Quare duo anguli KOC, KEN etiam æquales erunt: & propterea quatuor puncta N, K, O, E pariter erunt in circumferentia ejusdem circuli.

47. Hinc angulus EKN æqualis erit angulo EON; adeoque, quum angulus EON æqualis sit angulo EFM, duo anguli EKN, EFM æquales erunt inter se. Unde rectæ duæ KN, FM parallelæ erunt; & idcirco erit, ut EK ad KF, ita EN ad NN. Jam vero, ob similitudinem, tam triangulorum ANE, ACG, quam triangulorum ANM, ACH, EN est ad NM, ut GC ad CH. Itaque erit ex æquali, ut EK ad KF, ita GC ad CH: proindeque, sicuti EF bisecta est in K, ita GH bisecabitur in C.

48. Notari hoc loco potest, quod, sicuti ex puncto L duci possunt ad circulum tangentes duæ, ita binæ pariter esse queunt problematis hujus solutiones. Sed nec etiam silentio est prætereundum, quod punctum L potest quandoque abire in infinitum: scilicet, si puncta E, & F subinde dentur in circumferentia circuli, ut

recta EF sit ipsi AB parallela. Id vero quum contingit, invenietur punctum quæsitum, secando bifariam arcum, datis punctis interceptum. Nam in hoc casu etiam tangens fit ipsi AB, sive EF parallela.

V. Analysis Veterum geometricæ exemplum quartum.

49. QUartum, & ultimum exemplum, pro illustranda analysi Veterum geometrica, esto sequens problema: datis positione rectis AE, BF, contingentibus circulum ABD in punctis A, & B, determinare tangentem tertiam, quæ subinde iis occurrat, ut interceptæ portiones datam servent rationem inter se. Ponatur jam factum, sitque recta EF tangens tertia: adeo nempe, ut data sit ratio segmentorum DE, DF.

FIG. 4.

50. Sane, si ex centro circuli C ducantur radii CA, CD, CB; fient radii isti perpendiculares super tangentibus AE, EF, BF. Unde, junctis rectis CE, CF, bisecabuntur per rectas istas anguli ACD, BCD; adeoque, actis chordis AD, BD, fiet angulus quidem BAD æqualis angulo DCF, angulus vero ABD æqualis angulo DCE.

51. Hinc, si ulterius ex puncto D super AB perpendicularis demittatur DG, fient similia inter se, tam triangula AGD, CDF, quam triangula BGD, CDE. Interim segmenta DE, DF, quorum relatione opus est, reperiuntur in triangulis CDE, CDF, quæ nequaquam inter se similia sunt.

52. Interposita ergo * CD, dividamus rationem

* Art. 19.

nem ipsius DE ad DF in alias duas: nimirum in eam, quam habet DE ad CD; & eam, quam habet CD ad DF. Quumque DE sit ad CD, ut est DG ad BG; & CD sit ad DF, ut est AG ad DG; habebit DE ad DF rationem compositam ex AG ad DG, & ex DG ad BG.

53. Quia vero duæ istæ rationes componunt simplicem illam, quam habet AG ad BG; erit, ut DE ad DF, ita AG ad BG. Unde, sicuti data est ratio ipsius DE ad DF, sic dabitur quoque ratio, quam habet AG ad BG: & propterea eo res redit, ut recta AB, conjungens puncta A, & B, in data illa ratione dividatur.

54. Quum ergo id fieri possit ex Elementis, componetur problema in hunc modum. Jungantur puncta A, & B per rectam AB; & secetur recta ista AB subinde in G, ut AG ad BG sit in data illa ratione. Erigatur deinde ex puncto G ad circumferentiam usque perpendicularis GD. Et recta EF, contingens circulum in puncto D, erit tangens quæsita.

55. Ostendetur id vero hac ratione, Iisdem ut supra positis, AG est ad BG in ratione composita ex AG ad DG, & ex DG ad BG. Sed, ob similitudinem triangulorum AGD, CDF, AG est ad DG, ut CD ad DF; & ob triangula similia BGD, CDE, DG est ad BG, ut DE ad CD. Itaque AG ad BG habebit rationem compositam ex DE ad CD, & ex CD ad DF.

56. Jam duæ istæ rationes componunt simplicem illam, quam habet DE ad DF. Quare erit quoque, ut AG ad BG, ita DE ad DF: & propterea, sicuti AG ad BG est in data illa ratione; sic etiam DE ad DF eandem illam datam rationem obtinebit.

57. Ejusdem problematis potest etiam analysis institui in hunc modum. Quoniam angulo, existenti in circuli portione A*d*B, æqualis est uterque angulorum BAE, ABF; erunt duo isti anguli æquales inter se. Unde, si secetur recta AB subinde in G, ut sit AG ad BG, veluti est AE ad BF, & jungantur rectæ duæ EG, FG; æquiangula erunt triangula EAG, FBG.

58. Hinc, non modo angulus AGE æqualis erit angulo BGF, verum etiam erit, ut AE ad BF, ita EG ad FG. Jam vero æquales sunt inter se, tam duæ AE, DE, quam duæ BE, DF; & consequenter AE est ad BF, ut DE ad DF. Itaque erit ex æquali, ut DE ad DF, ita EG ad FG: & propterea, si jungatur recta DG, hæc secabit bifariam angulum EGF.

59. Quum ergo æquales sint inter se, tam anguli DGE, DGF, quam anguli AGE, BGF; erit etiam angulus AGD æqualis angulo BGD; adeoque uterque rectus erit. Secta est autem AB in ratione rectarum AE, BF, cui æqualis est ratio ipsius DE ad DF. Itaque eo rursus nos ducit analysis, ut perpendicularis, demissa super AB ex puncto quæsito D, dividat ipsam AB in data illa ratione.

60. Nec reticebimus, ejusdem problematis analysim posse adhuc institui sequenti ratione. Demittantur super AB perpendicula EK, DG, FL. Jamque erit, ut DE ad DF, ita KG ad LG. Sed DE ad DF est etiam, ut AE ad BF, sive, ut AK ad BL. Quare, quum in eadem ratione ipsarum DE, DF sit, tam AK ad BL, quam KG ad LG; erit quoque, ut DE ad DF, ita AG ad BG.

61.

61. Cæterum non est hic silentio prætereundum, problematis hujus duas dari posse solutiones; quandoquidem perpendicularis, quæ ex puncto G erigitur super AB, in duobus punctis D, & *d* occurrit circuli circunferentiæ; adeoque, tum tangens EF, cum tangens *ef* problemati satisfaciet. Esse vero ipsas EF, *ef* subinde sectas in punctis D, & *d*, ut in eadem ratione rectarum AG, BG sit tam DE ad DF, quam *de* ad *df*; facile ex dictis colligi potest.

VI. Veterum analysis geometrica pro demonstratione theorematum.

62. NOn modo in resolutione problematum utebantur Veteres analysi, verum etiam in demonstratione theorematum. Ubi enim quæstio erat de veritate alicujus theorematis, assumebant illud tamquam jam verum. Et siquidem, resolvendo progredientes, incidebant tandem in veritatem aliquam, jam ipsis cognitam, ac exploratam; de assumpta veritate theorematis nec item dubitabant: quam etiam synthetice ostendebant, invertendo ratiocinium, quod eos ad veritatem illam manuduxit. Vicissim vero, si ea positione absurdum aliquod ipsis offerebatur; falsum esse theorema ipsum, statim concludebant.

63. Ut si habeatur circulus ADB, descriptus centro C, intervalloque CA, vel CB, & ex aliquo circumferentiæ puncto D demisso ad diametrum AB perpendiculo DE, quæratur, num DE quadratum sit æquale rectangulo AEB; adhibita Veterum analysi, licebit, id experiri in FIG. 54

 hunc

hunc modum. Esto DE quadratum æquale rectangulo AEB. Itaque, apposito communi CE quadrato, erunt duo quadrata DE, CE æqualia rectangulo AEB una cum CE quadrato.

64. Jungatur deinde CD. Et, ob triangulum CED, rectangulum in E, erunt quadrata duo DE, CE æqualia quadrato ex CD; itemque, propter rectam AB, bisectam in C, & non bisectam in E, rectangulum AEB una cum CE quadrato erit æquale quadrato, quod fit ex CB. Quare erunt quadrata duo CB, CD æqualia inter se: & propterea etiam rectæ CB, CD æquales erunt. Unde, quum, propter circulum, revera æquales sint rectæ istæ; concludendum est, DE quadratum esse pariter æquale rectangulo AEB.

65. Componetur autem demonstratio, invertendo idem ratiocinium. Nimirum, propter circulum, rectæ duæ CB, CD inter se sunt æquales. Quare etiam quadrata ipsarum æqualia erunt. Sed, ob rectam AB, bisectam in C, & non bisectam in E, quadratum ex CB est æquale rectangulo AEB una cum CE quadrato. Et, ob triangulum CED, rectangulum in E, quadratum ex CD est æquale quadratis DE, CE. Quare erunt quadrata DE, CE æqualia rectangulo AEB una cum CE quadrato: proindeque, ablato communi CE quadrato, supererit quadratum ex DE æquale rectangulo AEB.

66. Similiter, si intra eundem circulum ADB sumpto quovis puncto F, demittatur exinde super diametro AB perpendicularis FE; & ducta per idem punctum F recta quavis alia GH, utrinque ad circumferentiam terminata, quæ-

quæratur, num FE quadratum una cum rectangulo GFH sit æquale rectangulo AEB; explorari id poterit, ope analysis Veterum, hac ratione. Esto FE quadratum una cum rectangulo GFH æquale rectangulo AEB. Itaque, addito communi CE quadrato, erunt quadrata duo FE, CE una cum rectangulo GFH æqualia rectangulo AEB una cum CE quadrato.

67. Jam, propter triangulum CEF, rectangulum in E, quadrata duo FE, CE sunt æqualia quadrato ex CF. Et ob rectam AB, bisectam in C, & non bisectam in E, rectangulum AEB una cum CE quadrato est æquale quadrato ex CB. Quare erit CF quadratum una cum rectangulo GFH æquale quadrato ex CB. Quumque, demisso super GH perpendiculo CK, fiat CF quadratum æquale quadratis CK, FK; erunt eidem quadrato ex CB æqualia pariter quadrata CK, FK una cum rectangulo GFH.

68. Et quoniam CK nequit esse perpendicularis super GH, nisi eam secet bifariam: proinde recta GH erit bisecta in K, & non bisecta in F. Unde FK quadratum una cum rectangulo GFH æquale erit quadrato ex GK: & propterea quadrato ex CB æqualia erunt quadrata duo CK, GK. Sed, ob triangulum CKG, rectangulum in K, quadrata duo CK, GK sunt æqualia quadrato ex CG. Quare duo quadrata CB, CG æqualia erunt inter se; & consequenter æquales erunt quoque rectæ ipsæ CB, CG.

69. Hinc, sicuti, propter circulum, revera obtinet æqualitas rectarum CB, CG; sic verum erit etiam, quod FE quadratum una cum rectangulo GFH est æquale rectangulo AEB.

Et

Et, invertendo ratiocinium, quod eo nos duxit, synthetice illud ostendemus hoc pacto. Quoniam ex natura circuli duæ CB, CG inter se sunt æquales; quadrata, quæ fiunt ex ipsis, pariter æqualia erunt. Sed CG quadratum est æquale duobus quadratis CK, GK; & CB quadratum est æquale rectangulo AEB una cum CE quadrato. Quare erunt quadrata duo CK, GK æqualia rectangulo AEB una cum CE quadrato.

70. Quia autem GK quadratum est æquale rectangulo GFH una cum FK quadrato; erunt quadrata duo CK, GK æqualia rectangulo GFH una cum duobus quadratis CK, FK. Sed duo ista quadrata CK, FK sunt æqualia duobus quadratis CE, FE; quum triangula duo rectangula CKF, CEF communem habeant hypothenusam CF. Quare eadem duo quadrata CK, GK erunt æqualia rectangulo GFH una cum quadratis CE, FE: & propterea rectangulum GFH una cum quadratis CE, FE æquale erit rectangulo AEB una cum CE quadrato. Unde, dempto communi quadrato ex CE, supererit rectangulum GFH una cum FE quadrato æquale rectangulo AEB.

71. Cæterum hæc circuli proprietas est paulo generalior præcedente, & vertitur in eam, cum punctum F accedit ad punctum D. Plane vero distinguendi sunt duo casus, si punctum F capiatur extra circulum. Primus est, quum punctum E cadit intra circulum; & in isto casu erit FE quadratum æquale duobus rectangulis AEB, GFH. Alter est, quum etiam punctum E cadit extra circulum; & ubi id evenit, erit FE quadratum una cum rectangulo AEB æquale rectangulo GFH. Sed in utroque casu, si punctum E

ac-

accedit ad A, ita, ut fiat FE tangens circuli; habebitur FE quadratum æquale rectangulo GFH: quæ est proprietas tangentis.

CAPUT II.

Analysis Recentiorum, calculo promotæ, artificium.

72. QUa ratione Veteres per analysim, tum problemata resolvebant, cum theoremata demonstrabant; jam quidem præcedenti capite variis exemplis exposuimus. Sequitur modo, ut quo pacto Recentiores, mediante calculo litterali, eandem analysim adhibeant, sive in resolutione problematum, sive in theorematum inventione, paulo fusius ostendamus. Nam, quæ summatim de hac re innuimus sub ipsum hujus libri initium *, procul est ut artificii analytici, a Recentioribus usurpati, claram, distinctamque notionem nobis suppetere valeant. * art. 5.

73. Et quidem ejus analysis, qua utuntur Recentiores in resolutione problematum, quatuor sunt partes præcipuæ. Prima est problematis, seu quæstionis status clara, ac evidens cognitio. Secunda est datarum, & quæsitarum quantitatum congrua, ac apposita denominatio. Tertia est æquationis inter datas, & quæsitas quantitates inventio. Et quarta demum est inventę ęquationis ad concinniorem formam reductio. Quare, ut artificium analyticum Recentiorum rite intelligatur; quatuor illæ partes, ex qui-

quibus constat, sigillatim hoc capite explicandæ nobis erunt.

I. Problematis status claro, ac evidens cognitio.

74. PRimum, quod fieri debet in resolutione alicujus problematis, est, ut clare, distincteque percipiatur id, quod in ipso quæritur problemate. Clara ista, & distincta cognitio obtinetur; perpendendo sedulo conditiones, in problemate appositas. Sicuti enim quodlibet problema, præter incognitum, seu quæsitum, continet etiam datum, seu notum; ita problematis resolutionem non aliter assequi licebit, quam per relationem, quam ad datum, seu cognitum id, quod quæritur, debet habere. Plane vero hujusmodi relatio non alia ratione nobis innotescet, quam expensis diligenter conditionibus, quæ eidem problemati adjiciuntur.

75. Ita, si proponatur resolvendum sequens problema arithmeticum: invenire duos numeros, quorum summa sit 100, differentia 40; liquet, in hoc problemate, ut duos esse numeros incognitos, seu quæsitos, ita duos alios esse datos, seu notos, nimirum 100, & 40. Quocirca, ut statum qustionis distinctissime teneamus, consideremus oportet conditiones, appositas in problemate, quæ exprimunt nobis relationes, quas numeri quæsiti ad numeros datos debent habere: quales quidem sunt duæ; una, ut numeri inveniendi, simul sumpti, conficiant 100; & altera, ut minor, de majore subductus, relinquat 40.

76.

76. Præstat autem, conditiones, appositas in problemate, serio mente contemplari, non modo, ut statum quæstionis distinctissime intelligamus; verum etiam, quia plerumque, præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam apponuntur, plane superfluæ, & quæ ut plurimum reddunt problema impossibile, si in ipsius resolutione earum ratio velit haberi. Ita, si in data recta linea terminata constituendum esset triangulum æquilaterum, cujus omnes anguli sint æquales; jam postrema conditio superflua foret. Et si, ut petuntur anguli æquales, ita datam rationem inæqualitatis habere debeant inter se; non modo superflua, sed impossibilis quoque erit ista conditio.

77. Conditio superflua simul, ac impossibilis quandoque latet in ratione, qua solutio ejus postulatur; veluti, si inter duas rectas datas binæ mediæ proportionales proponantur inveniendæ, aut etiam datus angulus rectilineus tripartito secari debeat, & qui ejusmodi proponit problemata, petat eorum solutiones Geometriæ planæ præsidio, hoc est rectæ, & circuli intersectione. Eo ipso enim, quod hoc petit, jam solutu impossibilia reddit problemata illa. Nam, Geometriæ planæ beneficio, nec angulum rectilineum tripartito secari, nec inter duas rectas datas binas medias proportionales posse inveniri; nemo, nisi Geometriæ expers, ignorat.

78. Quemadmodum vero plerumque, præter conditiones, ad problematis determinationem necessarias, aliæ etiam apponuntur, omnino superfluæ, & quæ ut plurimum reddunt problema solutu impossibile; ita quandoque nec omnes

mnes apponuntur conditiones, quæ ad problematis determinationem sunt necessariæ: qua ratione problema indeterminatum erit, infinitasque solutiones diversas admittet. Ut, si in data recta linea terminata constituendum proponatur triangulum isosceles, nulla alia conditione adjecta. Sic enim non unum, sed infinita triangula isoscelia quæsito satisfacient.

79. Hinc duo problematum genera passim distingui solent, determinata, & indeterminata. Problemata determinata dicuntur illa, in quibus conditiones appositæ id, quod quæritur, determinant, quæque proinde definitum numerum solutionum diversarum admittunt. Per contrarium vero problemata indeterminata vocantur ea, in quibus conditiones appositæ quæsitas quantitates non satis determinant, quæque propterea infinitis modis diversis solvi possunt. Sed duobus hisce problematum generibus, ut vidimus paulo ante *, tertium adjici debet, nimirum eorum, in quibus plures apponuntur conditiones, quam quæ ad ipsorum determinationem requiruntur: & problemata ista plusquam determinata poterunt appellari.

* art. 76.

80. Hæc tria problematum genera nemo melius inter Recentiores distinxit, quam Johannes Pellius, Rhonii discipulus, qui simul ostendit, quomodo de proposito aliquo problemate judicium sit ferendum. Nimirum, quum numerus datorum, a se mutuo non dependentium, minor est, quam quæsitorum; problema est indeterminatum, atque adeo infinitarum solutionum capax. Ubi vero numerus datorum quæsitorum numerum adæquat; problema est determinatum,

& non-

& nonnisi certum numerum solutionum diversarum admittit. Et denique, quum data plura fuerint, quam quæsita; problema erit plusquam determinatum, & consequenter impossibile, si data illa simul subsistere nequeant.

81 Eadem problematum genera consideravit etiam inter Veteres Proclus, qui, sicuti problema proprie vocavit illud, quod determinatum est, certisque tantum modis solvi potest; sic appellandum esse duxit problema deficiens, quod non est perfecte determinatum, & infinitas adeo subit solutiones diversas. Illud autem problema, quod plures habet conditiones, quam quæ ad plenam ejus determinationem requiruntur, vocavit excedens, seu redundans, quum superfluæ conditiones non pugnant cum necessariis; vocavit vero impossibile, quum eædem illæ conditiones inter se mutuo contrariæ deprehenduntur.

82. Ut hæc omnia exemplis magis illustrentur, oporteat primum, datam rectam AB subinde dividere, ut rectangulum, sub segmentis ejus contentum, adæquet quadratum, quod fit ex recta altera data H. Jam in hoc problemate duæ existunt conditiones; una, quod latera rectanguli inveniendi, simul sumpta, æqualia esse debent datæ rectæ AB; altera, quod idem rectangulum inveniendum æquale sit oportet quadrato ex altera recta data H. Sufficere vero duas hasce conditiones ad quæsiti rectanguli determinationem; perspicuum quidem est.

83. Describatur enim super AB, velut diametro, semicirculus ACB; & super eadem AB erigatur ex extremitate A perpendicularis AE,

quæ

quæ ipsi H sit æqualis. Agatur porro per punctum E recta ECD, eidem AB parallela, quæ semicirculi circumferentiam secet in punctis C, & D. Jamque, si ex punctis istis demittantur super AB perpendiculares CF, DG; erit, tum AFB, cum AGB rectangulum quæsitum. Nam, propter circulum, utrumque eorum est æquale quadrato ex AE, quod ex constructione adæquat quadratum, quod fit ex H.

84. Auferatur modo ex isto problemate una conditio, puta, quod latera rectanguli inveniendi, simul sumpta, æqualia esse debent rectæ datæ AB; & dumtaxat quæratur rectangulum, quod sit æquale quadrato ex recta data H. Ob defectum ejus conditionis, jam problema evadit indeterminatum, & infinita rectangula possunt exhiberi, quę quęsito satisfaciant. Capiatur enim recta quævis K. Et, siquidem post ipsas K, & H sit L tertia proportionalis; erit rectangulum ex K in L æquale quadrato, quod fit ex H. Plane vero rectangulum istud, ob latus K, quod sumi potest ad libitum, infinitarum variationum est capax.

85. Denique eidem problemati, præter duas illas conditiones, adjiciatur tertia quævis, puta, quod latera rectanguli inveniendi debent esse in data ratione. Et quoniam rectangulum inveniendum per priores duas conditiones satis apte determinatur *; perspicuum est, hanc tertiam conditionem ad quæsiti rectanguli determinationem superfluam esse. Unde, si in resolutione problematis tertiæ ejus conditionis ratio velit haberi, fieri fortasse potest, ut problema solutu sit impossibile: scilicet si ratio, quam

* art. 83.

quam habere debent latera rectanguli inveniendi, non sit æqualis ei, quam utique haberent, si simul sumpta datam rectam adæquent, & rectangulum contineant, dato quadrato æquale.

86. Cæterum impossibilia esse possunt, non solum ea problemata, quæ plures habent conditiones, quam quæ ad ipsorum determinationem requiruntur, verum etiam ipsa problemata determinata. Nam nihil obstat, ut eæ conditiones, per quas problema determinatur, quandoque pugnent inter se. Ita allatum problema, etiam quum determinatum est, solutu impossibile erit, si recta H major fuerit semisse ipsius AB. Nam, sicuti, quum ei est æqualis, recta ECD fit tangens semicirculi, adeoque rectangula duo AFB, AGB, quæ problemati satisfaciunt, coincidunt in unum; ita, existente majore, eadem recta ECD, nec tangit, nec secat semicirculum, & consequenter nullum erit rectangulum, per quod quæsito fit satis. FIG. 6.

II. Datarum, & quæsitarum quantitatum apposita denominatio.

87. Statu quæstionis, per conditiones, in ea appositas, rite intellecto; in id deinde incumbendum est, ut mens nostra in ejus solutione omnes quantitatum habitudines, seu relationes præsentes habeat. Hunc in finem præstat, quantitates omnes, quæ in problemate occurrunt, Alphabeti litteris subinde designare, ut tamen datæ, seu cognitæ ab incognitis, seu quæsitis facili negotio distingui possint. Id a primis Algebræ speciosæ promotoribus ita fa-

ctum est, ut priores consonantibus, posteriores vocalibus exprimerentur. Sed ab iis, qui deinde secuti sunt, illud communiter usurpatum, ut quantitates datæ, seu cognitæ prioribus Alphabeti litteris *a*, *b*, *c*, &c., quantitates vero incognitæ, seu quæsitæ litteris postremis *x*, *y*, *z*, &c. exhiberentur.

88. Quærantur ergo duo numeri, quorum tam summa, quam differentia sit data. In hac quæstione quatuor occurrunt quantitates: duæ scilicet datæ, seu cognitæ; & aliæ duæ incognitæ, seu quæsitæ. Itaque, ut a se mutuo facile distingui possint, datas quidem prioribus Alphabeti litteris, quæsitas vero litteris postremis repræsento. Nimirum summam numerorum inveniendorum, veluti datam, voco *a*; differentiam eorundem numerorum, similiter datam, voco *b*; & ipsos illos numeros, quos oportet invenire, velut incognitos, designo litteris *x*, & *y*. Atque, his nominibus impositis, jam quæstio eo reducitur, ut quantitatum *x*, & *y* summa quidem sit *a*, differentia vero *b*.

FIG. 7. 89. Oporteat quoque, rectam datam AB subinde dividere in C, ut rectangulum, sub segmentis ejus contentum, ACB sit æquale quadrato, quod fit ex recta altera data DE. Quoniam recta AB data est, designetur illa una ex prioribus Alphabeti litteris, puta *a*. Et similiter, quia recta DE est data, hæc quoque altera ex prioribus litteris Alphabeti, puta *b*, repræsentetur. Plane vero segmenta AC, BC ipsius AB omnino nos latent; quum ea sint, quæ in problemate proponuntur invenienda. Itaque designentur segmenta illa duabus litteris postremis Alphabe-

ti,

ti, puta x, & y. Jamque, facta denominatione ista, eo problema reducitur, ut summa quantitatum x, & y sit a, productum vero ex iis sit b^2.

90. In denominatione autem quantitatum facienda, ut paucioribus, quantum fieri potest, litteris utamur, præstat, ipsas quantitates secundum conditiones, in problemate appositas, denominare: quod vel ex eo etiam commendandum est, quia in hunc modum ipsæ quantitatum relationes magis nobis præsentes evadunt. Ita, quum quæruntur duo numeri, quorum data sit, tam summa, quam differentia, vocaturque summa eorum a, differentia b, & minor numerus x; licebit, majorem designare, vel per $x + b$, vel etiam per $a - x$. Nam differentia inter numerum majorem, & numerum minorem est b. Quare, addita differentia ista numero minori x, fiet $x + b$ numerus major. Et similiter, summa eorum numerum est a. Itaque, si ex summa ista auferatur minor x, residuum $a - x$ exhibebit numerum majorem.

91. Eadem ratione, quum datam rectam AB subinde oportet dividere in C, ut rectangulum ACB sit æquale quadrato ex recta altera data DE, vocaturque recta data AB, a, altera similiter data DE, b, & segmentum unum AC, x; designari poterit segmentum alterum BC, vel per $a - x$, vel etiam per $b^2 : x$; nimirum per $a - x$, quatenus est differentia inter totam AB, & segmentum unum AC; perque $b^2 : x$, quia, quum rectangulum ACB æquale esse debet quadrato, quod fit ex DE, omnino opus est, ut portio BC sit tertia proportionalis post duas AC, DE. FIG. 7.

92. In eorum problematum resolutione, in

quibus quantitates occurrunt diversæ speciei, ad facilius eas a se invicem distinguendas, juvat, initialibus suis litteris illas repræsentare. Ita, si dato motu alicujus corporis, æquabiliter lati, & dato item pondere ejus, quæratur velocitas, qua corpus idem movetur; poterit motus designari littera *m*, pondus littera *p*, & velocitas littera *u*. Pariterque, si data velocitate corporis, æquabiliter moti, datoque spatio, velocitate illa percurso, quæratur tempus, impensum ad spatium illud percurrendum; commodior erit denominatio, si velocitatem *u*, spatium *s*, & quæsitum tempus *t* appellemus.

93. Quantum autem afferat adjumenti distincta, & compendiosa quantitatum denominatio; liquere potest abunde ex variis illis proprietatibus, quæ de progressionibus arithmeticis, & geometricis priore libro horum Elementorum, vel hoc solo artificio, sunt ostensæ. Sed luculentius apparebit per ea theoremata, quæ de potentiis rectarum longo circuitu ostendit Euclides libro secundo suorum Elementorum. Nam eorum veritas statim fit cognita, ac explorata, ubi nomina lineis imponuntur, secundum ipsas relationes, quas habent inter se.

FIG. 8. 94. Ita, si recta AB secta sit bifariam in C, & non bifariam in D, duo ostendit Euclides. Primum, quod rectangulum sub partibus inæqualibus AD, BD una cum quadrato portionis intermediæ CD est æquale quadrato, quod fit ex dimidia AC. Alterum, quod quadrata ex iisdem partibus inæqualibus AD, BD sunt dupla quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione inter utramque sectionem interjecta

CD,

CD. Utrumque autem, congrua linearum denominatione, facili negotio ostendetur in hunc modum.

95. Rectæ semissis AC, vel BC vocetur a, & dicatur b portio intermedia CD. Fiet ergo $a+b$ portio major AD, & $a-b$ portio minor BD; adeoque erit a^2-b^2 rectangulum sub ipsis AD, BD. Unde, quia addito ei b^2, quod est quadratum portionis intermediæ CD, summa evadit a^2, quod est quadratum dimidiæ AC; liquet, rectangulum ADB una cum CD quadrato æquale esse quadrato ex AC. Et quoniam quadrata ex $a+b$, & $a-b$ simul sunt $2a^2+2b^2$; patet etiam, quadrata ex AD, BD dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC, CD.

96. Similiter, si recta AB secta sit bifariam in C, eique sit adjecta in directum alia quævis BD, duo demonstrat Euclides. Primum, quod rectangulum ADB, contentum sub tota, & adjecta, velut ex unica linea, & ipsa adjecta, una cum quadrato dimidiæ BC, est æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, velut ex unica, CD. Alterum, quod quadrata, quæ fiunt ex AD, & BD, hoc est ex tota, & adjecta, velut ex unica, & ipsa adjecta, sunt dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC dimidia, & ex dimidia, & adjecta, velut ex unica, CD. Sed horum utrumque sic facile licebit ostendere. FIG. 9.

97. Vocetur a semissis rectæ AC, vel BC, & dicatur b portio CD, quæ componitur ex dimidia, & adjecta. Quæ ergo coalescit ex tota, & adjecta, nimirum AD, fiet $b+a$, & erit $b-a$ adjecta sola BD; adeoque erit b^2-a^2 rectangulum sub ipsis AD, BD. Unde, quia addito

et a^2, quod est quadratum dimidiæ BC, summa evadit b^2, quod est quadratum ipsius CD; liquet, rectangulum ADB una cum BC quadrato æquale esse quadrato ex CD. Quumque quadrata ex $b+a$, & $b-a$ simul sint $2b^2+2a^2$; patet quoque, quadrata ex AD, BD dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC, CD.

III. *Æquationis inter cognitas, & incognitas quantitates inventio.*

98. Impositis nominibus, tum cognitis, cum incognitis quantitatibus, in id deinceps incumbendum, ut, nullo facto discrimine inter quantitates illas, considerentur omnes promiscue, velut jam notæ, & ipsius problematis conditiones eò usque evolvantur, ac inter se mutuo comparentur, donec una, eademque quantitas duobus modis diversis exprimi possit. Nam, quum binæ istæ expressiones uni, eidemque quantitati conveniant; eædem æquales erunt inter se: & propterea, instituta inter eas æqualitate per signum istud $=$, invenietur inter cognitas, & incognitas quantitates æquatio, cujus ope facile erit, unius ex incognitis quantitatibus valorem invenire.

99. Jam, quum problema est determinatum, quia numerus datorum, a se mutuo non dependentium, quæsitorum numerum adæquat *, tot licebit æquationes invenire, quot occurrunt incognitæ quantitates. Sed iis inventis, in id porro operam dandum, ut ex omnibus illis, per debitas substitutiones, nova quædam æquatio deducatur, quæ unicam dumtaxat contineat inco-

* art. 80.

co-

cognitam quantitatem, & eam proprie, unde valores aliarum facile eruuntur. Nam, ficuti nova ista æquatio exhibet nobis valorem ejus incognitæ, quam includit, per folas quantitates cognitas expreffum; ita in eadem æquatione problema totum continebitur.

100. Plane enim fpeciales illæ æquationes, ex quibus nova ista deducitur, nonnifi per partes problema comprehendunt; quum ex ejus conditionibus, feorfim ad calculum revocatis, fint deductæ. Ubi autem in una ipfarum, fubrogando valores aliarum incognitarum, qui ex æquationibus aliis eruuntur, relinquitur unica dumtaxat incognita; tunc in eadem illa æquatione omnes fimul includuntur, & ut ita dicam coacervantur. Unde, quum illiufmodi æquatio omnes fimul problematis conditiones comprehendat; eadem, non quidem per partes, fed integre, & abfque ulla diminutione problema, de quo agitur, continebit.

101. Ut hæc omnia exemplis magis nota fiant, nec tamen recedamus ab iis, quæ fuperius pofita funt, proponantur rurfus inveniendi duo numeri, quorum data fit, tam fumma, quam differentia. Vocetur adhuc fumma numerorum a, differentia eorundem b, numerus minor x, & numerus major y. Quia ergo in hoc problemate, natura fua determinato, duæ occurrunt quantitates incognitæ; duas etiam æquationes oportet invenire. Plane vero, quia prima problematis conditio exigit, ut fumma numerorum x, & y fit a; erit $x + y = a$ una æquatio. Quumque fecunda conditio requirat, ut differentia inter majorem y, & minorem x fit b; erit $y = x$

 $+ b$

$+b$ æquatio altera. Unde, ſi in prima harum æquationum loco y ſubrogetur valor ejus $x+b$, quem ſecunda præbet æquatio; orietur æquatio tertia $x+x+b=a$, ſive etiam $2x+b=a$, in qua unica incognita quantitas reperitur.

FIG. 7. 102. Oporteat ſimiliter, rectam AB ſubinde dividere in C, ut rectangulum ACB, contentum ſub ſegmentis ejus, æquale ſit ei, quod ſuper DE deſcribitur, quadrato. Ponatur, ut antea, $AB=a$, $DE=b$, $AC=x$, & $BC=y$. Et quoniam in hoc alio problemate, natura ſua pariter determinato, duæ itidem occurrunt quantitates incognitæ; duæ etiam æquationes erunt inveniendæ. Jam prima eruitur ex eo, quod, ſubducta AC ex AB, remanet BC: inde enim ſequitur, debere eſſe $a-x=y$. Secundam vero præbet nobis æqualitas ipſa, quæ inter rectangulum ACB, & DE quadratum eſſe debet, eſtque $xy=b^2$. Unde porro, ſi in hac ſecunda æquatione loco incognitæ y, ſubſtituatur valor ejus $a-x$, qui ex prima æquatione deducitur; orietur æquatio tertia $x(a-x)=b^2$, hoc eſt $ax-x^2=b^2$, quæ unicam dumtaxat continet incognitam quantitatem.

*art. 90. 103. Sed notetur hoc loco velim, quod ſi nomina * quantitatibus imponantur, ſecundum ipſas conditiones, appoſitas in problemate, ab initio invenitur æquatio, quæ unicam incognitam quantitatem includit. Hac ratione in primo problemate, ubi quæruntur duo numeri, quorum data ſit, tam ſumma, quam differentia, ſi referente adhuc a ſummam, & b differentiam, vocetur x numerus minor; fiet numerus major $x+b$, adhibita differentia; & $a-x$, adhibita

ſum-

summa. Quare, instituta æqualitate inter duas istas ejusdem numeri expressiones; habebitur æquatio $x + b = a - x$, quæ per regulas, mox tradendas, reducitur ad $2x + b = a$, prorsus ut supra *. *art. 101.

104. Eadem ratione in altero problemate, ubi datam rectam AB subinde oportet dividere in C, ut rectangulum, sub segmentis ejus contentum, ACB sit æquale quadrato, quod sit ex DE, si manentibus $AB = a$, & $DE = b$, ponatur segmentum unum $AC = x$, fiet segmentum alterum $BC = a - x$; quandoquidem, dempto ex tota AB segmento priore AC, remanet alterum segmentum BC: proindeque erit rectangulum $ACB = ax - x^2$. Quumque quadratum ex DE sit b^2, & quadrato huic æquale esse debeat rectangulum ACB, erit pariter idem rectangulum $ACB = b^2$. Unde, instituta æqualitate inter duas hasce expressiones ejusdem rectanguli ACB, habebitur tandem æquatio $ax - x^2 = b^2$, omnino ut antea *. FIG. 7. *art. 102.

105. In resolutione ergo problematum determinatorum tot semper reperire licebit æquationes, quot occurrunt in iis quantitates incognitæ; & ex omnibus illis æquationibus semper alia erui poterit, quæ unicam incognitam quantitatem includens, omnes problematis conditiones simul complectatur. Sed, si exhaustis singulis problematis conditionibus, non inveniantur tot æquationes, quot in eo occurrunt incognitæ quantitates; tunc indicio erit, in problemate non omnes appositas esse conditiones, quæ ad determinationem ejus requiruntur: & propterea idem resolvi posse infinitis modis di-

diversis: nimirum assumendo ad libitum quantitates incognitas, quibus nulla correspondet æquatio.

106. Ita, si quærantur duo numeri, quorum summa tantum sit data; problema erit indeterminatum. Plane vero, si referente a summam numerorum inveniendorum, vocetur x numerus unus, & y numerus alter; quia id tantum in problemate datur, ut summa ipsorum x, & y sit a, hæc dumtaxat invenietur æquatio $x+y=a$. Atque ita quoque, quum quæritur rectangulum, quod sit æquale dato quadrato; problema indeterminatum est. Et profecto, vocando x, & y latera rectanguli inveniendi, & b latus dati quadrati; non aliam invenire licet æquationem, quam $xy=b^2$.

107. Jam, quod problema non sit penitus determinatum, quum non inveniuntur tot æquationes, quot in illo problemate occurrunt quantitates incognitæ, nec tamen aliqua omittitur ex conditionibus appositis; ostendi quidem potest in hunc modum. In problemate, ut quælibet incognita quantitas determinari possit, necesse est*, tot in eo conditiones apponere, quot sunt quantitates incognitæ. Jam vero æquationes inveniuntur per ipsas conditiones, appositas in problemate: adeo quidem, ut unaquæque conditio suam nobis præbeat æquationem. Itaque, ad determinandas omnes problematis quantitates incognitas, tot oportebit æquationes invenire, quotus est numerus ipsarum incognitarum.

* Art. 80.

108. Id vero quum ita sit, dicendum est per contrarium, non adesse in problemate tot

con-

conditiones, quot requiruntur ad determinationem incognitarum omnium, quum numerus æquationum minor est numero ipsarum incognitarum; nec proinde problema omnem suam determinationem habere. Sed eodem ratiocinio facile erit etiam definire, quot problemati adjiciendæ sint conditiones, quo determinatum fiat, & certis dumtaxat modis solvi possit: nimirum tot præcise, quot sunt quantitates incognitæ, quibus nulla correspondet æquatio, sive etiam quotus est numerus, per quem multitudo æquationum ab incognitarum multitudine deficit.

109. Cæterum, sicuti, quum numerus æquationum inventarum minor est numero incognitarum, argumento id nobis esse debet, problema non esse penitus determinatum, nec omnes habere conditiones, ad determinationem ejus necessarias; ita vicissim, quum numerus æquationum major est numero incognitarum, indicio id nobis esse potest, problema esse plusquam determinatum, pluresque habere conditiones, quam quæ ad determinationem ejus requiruntur. Et, sicuti etiam numerus, per quem multitudo æquationum ab incognitarum multitudine deficit, ostendit nobis *, quot conditiones problemati sunt adjiciendæ, ut determinatum evadat; ita numerus, per quem multitudo æquationum excedit multitudinem incognitarum, aperit nobis adamussim, quot conditiones ex problemate sunt removendæ, ut justam suam subeat determinationem.

* art. 108.

IV. *Inventæ æquationis ad concinniorem formam reductio.*

110. INventa æquatione, quæ singulas problematis conditiones includens, unicam continet quantitatem incognitam; evenit, ut plurimum, ut ea non statim apta sit solvendæ propositæ quæstioni. Hinc ea ulterius debet esse Analystæ solertia, ut æquationem illam ad formam revocet concinniorem; separando, quantum fieri potest, in ea quantitates cognitas ab incognita; & transferendo ad unam partem æquationis terminos omnes, in quibus existit incognita quantitas; & ad partem alteram omnes alios, in quibus solæ cognitæ quantitates reperiuntur. Id autem obtinebit; vel si membra æquationis per quantitatem aliquam multiplicet, aut dividat; vel si membris illis aliquid addat, aut subtrahat.

111. Primo igitur adhibebit multiplicationem, aut divisionem; ubi quantitas incognita in uno, eodemq; termino cum quantitate alia cognita conjuncta reperitur. Si enim sunt simul conjunctæ in termino illo per multiplicationem; separabit eas a se invicem, ope divisionis, quæ opponitur multiplicationi: nimirum dividendo æquationis terminos omnes per cognitam illam quantitatem. Quod si vero sunt conjunctæ simul in aliquo termino ad modum fractionis; separabit eas, per multiplicationem, quæ opponitur divisioni: scilicet multiplicando terminos omnes æquationis per denominatorem fractionis. Nec divisione, aut multiplicatione ista alterari quic-

quam

quam poterit æquatio. Nam, divisis, aut multiplicatis æqualibus per æqualia; quæ fiunt, etiam æqualia esse debent.

112. Hac ratione, si in resolutione alicujus problematis inciderit Analysta in hanc æquationem $ax = bc + ac$; separabit in ea quantitatem cognitam ab incognita, dividendo utramque partem per a; quandoquidem divisione ista orietur loco ejus hæc alia æquatio $x = bc : a + c$. Et similiter, si ex aliquo problemate deduxerit sequentem æquationem $ax + cx = b^2 - a^2$; separabit in illa cognitas ab incognita, dividendo æquationis utramque partem per $a + c$; quum sic fiat $x = (b^2 - a^2) : (a + c)$. Quod si autem æquatio, ex aliquo problemate nata, sit $x^2 : a = b + c$; fiet in ea separatio cognitæ ab incognita, multiplicando utramque partem per a; quia sic habebitur $x^2 = ab + ac$. Pariterque, ut in ista æquatione $ab : x = a + x$ possit incognita a cognitis separari, multiplicandi sunt termini omnes per x: qua ratione fiet $ab = ax + x^2$.

113. Neque vero in hac alia æquatione $ab = ax + x^2$ separanda est quantitas cognita a ab incognita x, eo quod reperiuntur per se mutuo multiplicatæ in termino ax. Nam in hujusmodi æquationibus, quæ, ut suo loco dicemus, vocantur affectæ, fieri nequit totalis incognitæ a cognitis separatio, nisi eæ per regulas, inferius tradendas, in suas radices resolvantur. Si enim illius termini omnes dividantur per a, prodibit hæc altera æquatio $b = x + x^2 : a$, in qua adhuc cognita a conjungitur cum incognita x. Quocirca notetur hoc loco velim, quod semper ac maxima incognitæ potestas, quæ in æquatione conti-

tinetur, cum nulla cognitarum conjungitur, ut contingit, tam in æquatione $ab = ax + x^2$, quam in hac alia $x^3 + ax^2 = a^2x - a^2b$; tunc incognita a cognitis censeri debet sufficienter separata, nec proinde instituenda est separatio alia.

114. Id vero intelligendum est, ubi in æquatione adest aliquis terminus omnino notus. Nam si contingat, ut vel incognita ipsa, vel aliqua ejus potestas in omnibus æquationis terminis reperiatur; tunc eam, ope divisionis, delere oportebit; adeoque adhuc separatio est instituenda. Ita, quia in quolibet termino hujus æquationis $x^3 + bx^2 = c^2x$ reperitur incognita x; delenda est ea, dividendo terminos omnes per x; qua ratione habebitur loco ejus hæc alia $x^2 + bx = c^2$. Atque ita quoque, si habeatur æquatio $x^4 + 2ax^3 = b^2x^2$, quæ in singulis terminis includit x^2; dividendo per x^2, prodibit $x^2 + 2ax = b^2$.

115. Separata, quantum fieri potest, multiplicationis, & divisionis beneficio, quantitate incognita a quantitatibus cognitis; transferendi sunt deinde termini omnes, in quibus incognita quantitas existit, ad unam partem æquationis, ut remaneant in altera ii omnes, qui ex solis cognitis constant. Id autem obtinebitur additione, vel subtractione terminorum, qui ad hanc, vel illam æquationis partem sunt transferendi: nimirum additione, quum termini transferendi afficiuntur signo $-$; & vicissim subtractione, quum iidem termini signo $+$ affecti reperiuntur. Nec hujusmodi additione, vel subtractione perturbari quicquam poterit æquatio. Nam, si æqualibus æqualia addantur, aut detrahan-

trahantur; aggregata, aut residua semper æqualia erunt.

116. Perficienda sit ergo legitima terminorum transpositio in hac æquatione $x^2 - c^2 = a^2 + ax$. Primum transfero ad partem alteram terminum c^2, qui, quum signo $-$ afficiatur, addendus est utrique parti æquationis; & additione ista æquatio fiet $x^2 - c^2 + c^2 = a^2 + ax + c^2$. Deinde transfero ad alteram partem terminum ax, qui, velut affectus signo $+$, subtrahendus est ex utraque parte æquationis; & hac subtractione eadem æquatio evadet $x^2 - c^2 + c^2 - ax = a^2 + ax + c^2 - ax$. Unde, deletis terminis, qui contrarietate signorum se mutuo destruunt, habebitur tandem loco propositæ æquationis hæc alia $x^2 - ax = a^2 + c^2$, in qua ad unam partem existunt termini incogniti, & ad partem aliam termini cogniti.

117. Id vero quum ita sit, liquet, transpositionem istam terminorum fieri simplicius, si nulla instituatur additio, vel subtractio; sed dumtaxat ipsi termini, mutatis signis, ad alternas partes æquationis transferantur. Unde æquatio ista $x^3 - a^3 = ax^2 - abx + c^3$, transpositis terminis, evadet $x^3 - ax^2 + abx = c^3 + a^3$. Pariterque æquatio $ax^3 - b^4 = c^2x^2 - ab^2x - x^4$, per transpositionem terminorum, fiet $x^4 + ax^3 - c^2x^2 + ab^2x = b^4$. Sed hunc in modum transferri possunt ad eandem partem omnes æquationis termini; & tunc terminorum omnium collectio prodibit æqualis zero, seu nihilo. Ut, si habeatur $x^2 + ax = b^2$; erit, transponendo, $x^2 + ax - b^2 = 0$. Et similiter, si fuerit $x^3 + ax^2 = c^2x - b^3$; erit, per transpositionem termi-

minorum omnium, $x^3 + ax^2 - c^2x + b^3 = 0$.

118. Si in utraque æquationis parte unus, idemque terminus, eodem ſigno notatus, occurrat; is utrinque deleri poteſt, abſque ullo æquationis præjudicio. Nam, ſi ambo transferantur ad eandem partem, comperientur in ea ſignis contrariis. Quare, quum ſe mutuo deſtruant, ambo deleri poterunt ab initio. Ita, ſi habeatur $x^2 + ax = ax + ab$, fiet $x^2 = ab$; quandoquidem, per tranſpoſitionem, erit $x^2 + ax - ax = ab$, & profecto $+ ax - ax$ ſeſe invicem deſtruunt. Atque ita quoque, ſi fuerit $x^3 - a^2x = ab^2 - a^2x$, erit $x^3 = ab^2$; nam, tranſponendo, fiet $x^3 - a^2x + a^2x = ab^2$, & $- a^2x + a^2x$ idem ſunt, ac zero, ſeu nihil.

119. In concinnandis æquationibus etiam formatio poteſtatum uſui nobis eſſe poteſt. Nam, ſi incognita æquationis, de qua agitur, ſub radicali ſigno contineatur; eam ab illo ſigno extricare oportebit. Quod non aliter fiet, quam transferendo ad unam partem æquationis omnes alios terminos rationales, & elevando utramque partem ad eam poteſtatem, quam deſignat exponens ſigni radicalis. Ut, ſi habeatur $\sqrt{ax} - x = b$; transferatur primo x ad partem alteram, ut fiat $\sqrt{ax} = x + b$; deinde elevetur utraque pars ad quadratum; & erit $ax = x^2 + 2bx + b^2$, ſive etiam $ax - x^2 - 2bx = b^2$.

120. Similiter, ſi æquatio concinnanda ſit $\sqrt[3]{(a^3 + b^2x)} - a = x$; tranſponendo primum erit $\sqrt[3]{(a^3 + b^2x)} = x + a$; tum, partibus ad cubum elevatis, fiet $a^3 + b^2x = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, cujus forma concinnior erit $b^2 - 3a^2 = x^2 + 3ax$. Atque ita quoque, ſi fuerit

erit æquatio $y = \surd(ay + y\surd ay)$; quadratis partibus, habebitur primum $y^2 = ay + y\surd ay$, sive etiam $y = a + \surd ay$; tum, translato a ad partem alteram, & partibus iterum quadratis, orietur adhuc $y^2 - 2ay + a^2 = ay$, quæ, per debitam terminorum transpositionem, evadet tandem $a^2 = 3ay - y^2$.

121. Extractione radicum possunt pariter ad simpliciorem formam æquationes revocari. Si enim omnino notum est quidquid in uno æquationis membro continetur, & in altero reperiatur potestas aliqua perfecta; extrahendo utrinque radicem ejus potestatis, æquatio longe simplicior evadet. Ita, si habeatur $x^2 = ab$, per extractionem radicis quadratæ erit $x = \surd ab$. Et similiter, si fuerit $x^3 = a^2b + a^2c$ per extractionem radicis cubicæ habebitur $x = \surd^3(a^2b + a^2c$. Neque vero radicales istæ simplicitati æquationum officiunt; quandoquidem in iis incognita quantitas non continetur.

122. Non est autem silentio hoc loco prætereundum, quod interdum necesse est, utrique membro æquationis aliquid apponere, ut extractione radicis ad simpliciorem formam æquatio revocetur. Sic, ut æquatio $x^2 + 2ax = b^2$ simplicior evadat, addendum est ad utramque partem a^2. Sic enim fiet $x^2 + 2ax + a^2 = a^2 + b^2$, quæ, per extractionem quadratæ radicis, evadet $x + a = \surd(a^2 + b^2)$, sive $x = \surd(a^2 + b^2) - a$. Atque ita quoque, ut simplicior fiat æquatio ista $x^4 + 2a^2x^2 = 3a^4$, addatur utrinque a^4. Et quia evadit $x^4 + 2a^2x^2 + a^4 = 4a^4$; erit, quadrata radice hinc inde extracta, $x^2 + a^2 = 2a^2$, sive etiam $x^2 = a^2$,

quæ, rursus per quadratæ radicis extractionem, fiet $x = a$.

123. Sed hujusmodi simpliciores æquationum expressiones sunt potius resolutiones ipsarum, de quibus fuse deinceps agendum est. Et * art. 122. profecto artificio, mox * tradito, jam ex omnibus æquationibus, in quibus incognita ad duas dimensiones ascendit, licebit valorem ejus eruere, atque adeo ipsam earum æquationum resolutionem obtinere. Esto enim æquatio duarum dimensionum $x^2 - ax = ab$. Fiat quadratum ex semisse ejus cognitæ quantitatis, per quam multiplicata reperitur incognita x; & ad utramque æquationis partem illud addatur. Habebitur ergo $x^2 - ax + a^2 : 4 = ab + a^2 : 4$. Quare, extracta utrinque quadrata radice, fiet $x - a : 2 = \sqrt{(ab + a^2 : 4)}$: proindeque erit $x = a : 2 + \sqrt{(ab + a^2 : 4)}$.

V. *Ratio exterminandi quantitates incognitas plenius explicata.*

124. PErlustratis partibus, ex quibus analyticum Recentiorum artificium constat, abunde, opinor, liquet, qua ratione per analysim, mediante calculo litterali, problemata mathematica resolvantur. Illud interim paulo uberius oportet ostendamus, quo pacto ex specialibus iis æquationibus, quæ problema continent per partes, erui possit æquatio alia, in qua omnes problematis conditiones simul includantur. Etsi enim non aliter id fieri * art. 99. debeat *, quam relinquendo in una earum æquationum unicam dumtaxat incognitam, & ex-

exterminando incognitas alias, per substitutionem suorum valorum; attamen valorum horum inventio persæpe difficultatem nimiam Tironibus facit.

125. Et quidem, si quantitas incognita exterminanda in una saltem æquationum particularium sit unius tantum dimensionis; facile erit, valorem ejus definire, atque adeo, per substitutionem, eandem exterminare. Ita, si ex resolutione alicujus problematis subortæ sint duæ istæ æquationes $ax = y^2$, & $x^2 + xy = by + y^2$; liquido patet, incognitam x esse unius tantum dimensionis in prima æquatione $ax = y^2$. Unde, quia dividendo per a, fit $x = y^2 : a$; exterminabitur ex secunda æquatione $x^2 + xy = by + y^2$ incognita x, ponendo $y^2 : a$ loco x, & $y^4 : a^2$ loco x^2: qua ratione orietur $y^4 : a^2 + y^3 : a = by + y^2$, cujus forma concinnior erit $y^3 + ay^2 - a^2y = a^2b$.

126. Similiter, si in resolvendo determinato aliquo problemate perventum sit ad duas hasce æquationes $ay = xy + x^2$, & $ay^2 + c^2y = x^3$; liquido constat, in prima ipsarum $ay = xy + x^2$ incognitam y ad unicam tantum dimensionem ascendere. Verum, pro valore ejus inveniendo, primo quidem in ea æquatione transferendus est ad partem alteram terminus xy, deinde vero dividenda est utraque pars per $a - x$. Sic enim fiet $y = x^2 : (a - x)$. Ponatur postea in secunda æquatione $ay^2 + c^2y = x^3$, tam $x^2 : (a - x)$ loco y, quam $x^4 : (a - x)^2$ loco y^2. Et habebitur $ax^4 : (a - x)^2 + c^2x^2 : (a - x) = x^3$, cujus forma concinnior erit $ac^2 = c^2x + a^2x - 3ax^2 + x^3$.

127. Quod si incognita exterminanda in neutra æquationum particularium sit unius tantum dimensionis; multiplicationis ope efficiendum est primo, ut ea in utraque æquatione ad eandem maximam potestatem ascendat; tum, quæsito valore maximæ hujus potestatis in una æquatione, substituendus est ille in æquatione altera loco ejusdem maximæ potestatis. Sic enim dimensiones exterminandæ incognitæ diminuentur. Et, iterando operationem istam, fieri tandem poterit, ut ea sit unius dumtaxat dimensionis in una earum æquationum: proindeque,
* Art. 125. methodo tradita *, facile deinceps erit, eandem exterminare.

128. Ut, si habeantur æquationes duæ $x^2 - ay = y^2$, & $x^3 + ayx = y^3$, & ex iis exterminanda sit incognita x; multiplico primum per x terminos omnes prioris æquationis, ut eadem in utraque æquatione sit maxima incognitæ potestas. Fiet ergo prior æquatio $x^3 - ayx = y^2x$, unde eruitur $x^3 = y^2x + ayx$. Pono deinde in secunda æquatione $x^3 + ayx = y^3$ loco x^3 valorem ejus $y^2x + ayx$; & habebitur $y^2x + ayx + ayx = y^3$, sive etiam $yx + 2ax = y^2$. Unde, quum fiat $x = y^2 : (y + 2a)$, per substitutionem valoris hujus, sive in prima, sive in secunda æquatione, orietur tandem æquatio alia, ubi x non amplius apparet.

129. Oporteat quoque, ex duabus hisce æquationibus $x^4 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, & $x^2 + ay = y^2$ eliminare incognitam x. Quoniam in priore æquatione maxima hujus incognitæ potestas est x^4, multiplicentur per x^2 termini omnes secundæ æquationis. Fiet ergo æquatio

ista

ita $x^4 + ayx^2 = y^2x^2$, quæ dabit $x^4 = y^2x^2 - ayx^2$. Ponatur poſtea hic valor ipſius x^4 in priore æquatione $x^4 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, & habebitur loco ejus hæc alia $y^2x^2 - ayx^2 + ax^3 = ay^3 + y^2x^2$, ſive etiam $x^3 - yx^2 = y^3$, in qua maxima poteſtas ejuſdem incognitæ x eſt x^3.

130. Hinc rurſus termini omnes ſecundæ æquationis $x^2 + ay = y^2$ multiplicentur per x. Quumque habeatur $x^3 + ayx = y^2x$, erit $x^3 = y^2x - ayx$; adeoque, in noviſſima æquatione $x^3 - yx^2 = y^3$ ſubſtituto loco x^3 valore ſuo, orietur $y^2x - ayx - yx^2 = y^3$, ſive etiam $yx - ax - x^2 = y^2$. Et quoniam in æquatione iſta maxima poteſtas incognitæ x eſt x^2, ponatur loco ejus valor ſuus $y^2 - ay$, qui eruitur ex ſecunda æquatione $x^2 + ay = y^2$; & habebitur hæc alia $yx - ax - y^2 + ay = y^2$, hoc eſt $yx - ax = 2y^2 - ay$. Quare, quum fiat $x = (2y^2 - ay) : (y - a)$; ſubrogato valore iſto, ſive in prima, ſive in ſecunda æquatione, habebitur tandem æquatio, ubi x non amplius occurrit.

131. Patet autem, calculum maxime laborioſum evadere, ubi quantitas exterminanda ad multiplices poteſtates in æquationibus aſcendit. Unde non abs re erit, cum celeberrimo Newtono, rem ad formulas quaſdam generales revocare, & in caſibus ſpecialibus ad eas confugere. Hujuſmodi formularum quatuor affert Vir ſummus in ſua Arithmetica univerſali. Sed, quia earum formatio eximium Newtoni ingenium redolet, nec eſt adeo facilis inveſtigatu; ad rem erit, methodum hic aperire, qua tales formulas proprio marte ſibi cudere valeat Analyſta.

132. Sit ergo x quantitas incognita extermi-

minanda, & eadem in utraque æquatione ad duas primum dimensiones ascendat. Plane in unaquaque earum æquationum una cum x^2 consociari potest etiam x. Itaque quantitates, per quas multiplicatæ reperiuntur potestates x^2, x, sunto a, b in prima æquatione, & f, g in secunda. Tum referat c omnes terminos prioris æquationis, in quibus x non reperitur; & h omnes hujusmodi terminos in secunda.

133. Nulla itaque habita signorum ratione, manifestum est, priorem æquationem exhiberi posse per $ax^2 + bx + c = 0$, & secundam per $fx^2 + gx + h = 0$. Jam harum æquationum prima dat $-x^2 = (bx + c) : a$, & secunda $-x^2 = (gx + h) : f$. Unde, quum fiat $(bx + c) : a = (gx + h) : f$; erit $bfx + cf = agx + ah$; atque adeo $x = (ah - cf) : (bf - ag)$. Et quoniam earundem æquationum prior dat quoque $-x = c : (ax + b)$, & posterior $-x = h : (fx + g)$; erit $c : (ax + b) = h : (fx + g)$. Quare, quum sit $cfx + cg = ahx + bh$, erit $x = (cg - bh) : (ah - cf)$.

134. Habetur ergo, tum $x = (ah - cf) : (bf - ag)$, cum $x = (cg - bh) : (ah - cf)$. Unde erit $(ah - cf) : (bf - ag) = (cg - bh) : (ah - cf)$, & $(ah - cf)^2 = (cg - bh) . (bf - ag)$, sive etiam $a^2h^2 - 2acfh + c^2f^2 = bcfg - b^2fh - acg^2 + abgh$. Cumque, per transpositionem terminorum omnium, fiat $a^2h^2 - 2acfh + c^2f^2 - bcfg + b^2fh + acg^2 - abgh = 0$; erit demum $(ah - 2cf - bg) ah + (bh - cg) bf + (ag^2 - cf^2) c = 0$, quæ est formula Newtoni pro exterminanda incognita x ex duabus æquationibus $ax^2 + bx + c = 0$, & $fx^2 + gx + h = 0$.

135.

135. Quod si incognita x in una æquationum ascendat ad duas dimensiones, & in altera ad tres; perspicuum est, istam exhiberi posse per $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$, illam vero per $fx^2 + gx + h = o$. Et quoniam harum æquationum prior dat $- x^3 = (bx^2 + cx + d) : a$, & secunda $- x^3 = (gx^2 + hx) : f$; erit $(bx^2 + cx + d) : a = (gx^2 + hx) : f$, sive etiam $bfx^2 + cfx + df = agx^2 + ahx$, in qua incognita x est duarum dimensionum. Quumque eædem æquationes dent quoque $- x^2 = (cx + d) : (ax + b)$, & $- x^2 = hx : (fx + g)$; erit $(cx + d) : (ax + b) = hx : (fx + g)$, sive etiam $cfx^2 + dfx + cgx + dg = ahx^2 + bhx$, ubi x pariter ad duas dimensiones ascendit.

136. Habemus ergo tres æquationes duarum dimensionum, quarum una est $fx^2 + gx + h = o$, altera $bfx^2 + cfx + df = agx^2 + ahx$, & tertia $cfx^2 + dfx + cgx + dg = ahx^2 + bhx$. Jam ex istis, sicuti prima dat $x = - h : (fx + g)$, ita secunda dabit $x = df : (agx - bfx + ah - cf)$, & tertia $x = dg : (ahx - cfx + bh - df - cg)$. Unde, sicuti, instituta æqualitate inter primum, & secundum valorem ipsius x, habetur $- h : (fx + g) = df : (agx - bfx + ah - cf)$, unde infertur $x = (dfg + ah^2 - cfh) : (bfh - df^2 - agh)$; ita, si æqualitas instituatur inter primum, & tertium valorem ejusdem x, habebitur $- h : (fx + g) = dg : (ahx - cfx + bh - df - cg)$, unde eruitur $x = (cgh + dfh - bh^2 - dg^2) : (ah^2 - cfh + dfg)$.

137. Æquentur modo inter se duo isti valores incognitæ x, & erit $(dfg + ah^2 - cfh) : (bfh - df^2 - agh) = (cgh + dfh - bh^2 -$

 $dg^2)$

dg^2) : ($ah^2 - cfh + dfg$), hoc est ($dfg + ah^2 - cfh)^2 = (cgh + dfh - bh^2 - dg^2) . (bfh - df^2 - agh$). Quumque, facta multiplicatione, nec non deletis terminis, se mutuo destruentibus, & divisis reliquis per h, habeatur $2adfgh + a^2h^3 - cdf^2g - 2acfh^2 + c^2f^2h = bcfgh + 2bdf^2h - b^2fh^2 - bdfg^2 - d^2f^3 - acg^2h - adfgh + abgh^2 + adg^3$; erit, per transpositionem terminorum omnium, $3adfgh + a^2h^3 - cdf^2g - 2acfh^2 + c^2f^2h - bcfgh - 2bdf^2h + b^2fh^2 + bdfg^2 + d^2f^3 + acg^2h - abgh^2 - adg^3 = 0$, sive etiam $(ah - 2cf - bg)\,ah^2 + (bh - cg - 2df)\,bfh + (ch - dg) . (ag^2 + cf^2) + (bg^2 + df^2 + 3agh)\,df = 0$, quæ est formula Newtoni, pro exterminanda incognita x ex duabus æquationibus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, & $fx^2 + gx + h = 0$.

138. Eadem ratione cudere licebit alias duas formulas Newtoni; quarum una inservit pro æquationibus $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, & $fx^2 + gx + h = 0$; altera pro æquationibus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, & $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$. Quantum vero ad usum harum formularum in casibus specialibus, is nullam difficultatem habet. Neque enim aliud fieri debet, quam loco indeterminatarum a, b, c, &c., f, g, h, &c. valores suos subrogare. Ut, si exterminanda sit incognita x ex duabus hisce æquationibus $x^2 + 5x - 3y^2 = 0$, & $3x^2 - 2yx + 4 = 0$; comparando eas cum æquationibus $ax^2 + bx + c = 0$, & $fx^2 + gx + h = 0$, fiet $a = 1$, $b = 5$, $c = -3y^2$, $f = 3$, $g = -2y$, & $h = 4$. Unde, debitis substitutionibus peractis, æquatio ($ah - 2cf - bg$) ah + ($bh - cg$) bf + (ag^2 + cf^2)

cf²)

$cf^4)c = 0$ vertetur in hanc aliam $(4 + 18y^2 + 10y)4 + (26 - 6y^3)15 + (4y^2 - 27y^2) \cdot (-3y^2) = 0$, quæ reducta fiet $316 + 40y + 72y^2 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

139. Cæterum, si non unica incognita ex duabus æquationibus, sed plures e pluribus exterminandæ sint; opus per gradus peragetur. Ita, si habeantur tres æquationes $ax = zy$, $x + y = z$, & $bx = cy + cz$, atque ex iis tollendæ sint incognitæ duæ x, & z; primum aufero unam ipsarum, puta x, substituendo pro ea valorem suum $zy : a$, qui eruitur ex prima æquatione $ax = zy$, in aliis duabus $x + y = z$, & $bx = cy + cz$. Quumque, per eam substitutionem, duæ istæ æquationes fiant $zy + ay = az$, & $bzy = acy + acz$; aufero deinde incognitam alteram y, ponendo valorem ejus $az : (z + a)$, per primam harum inventum, in æquatione alia $bzy = acy + acz$. Qua ratione habebitur $abz^2 : (z + a) = a^2cz : (z + a) + acz$, sive etiam $z = 2ac : (b - c)$, ubi nec x, nec y amplius occurrit.

140. Nec silentio est prætereundum, quod hoc artificio exterminari possunt omnes quantitates radicales, quæ simul reperiuntur in aliqua æquatione: nimirum, fingendo radicales illas totidem aliis incognitis æquales, & ex æquationibus, inde ortis, easdem incognitas exterminando. Ut, si habeatur $\sqrt{ax} - \sqrt{(ax - x^2)} = c - \sqrt[3]{a^2x}$; scribendo u pro $\sqrt{ax}$, y pro $\sqrt{(ax - x^2)}$, & z pro $\sqrt[3]{a^2x}$, non modo orietur $u - y = c - z$, verum etiam $u^2 = ax$, $y^2 = ax - x^2$, & $z^3 = a^2x$. Unde ex quatuor hisce æquationibus tollendo gradatim easdem inco-

cognitas a, y, z, resultabit tandem æquatio, libera ab omni assymetria.

VI. *Usus analysis Recentiorum in demonstratione theorematum.*

141. RElìquum jam est, ut nonnulla subjungamus de usu analysis Recentiorum in demonstratione theorematum. Et quidem artificium est plane idem, ac in resolutione problematum. Singulis enim quantitatibus, de quibus in theoremate agitur; impositis nominibus, secundum relationes, quas aliunde scimus inter se eas habere; non aliud efficiendum est, quam ut ad æquationem reducatur ea proprietas, de qua est quæstio. Nam, si contingat, ut subsistat æquatio ista, in quantum eædem utrinque quantitates reperiuntur, vera erit proprietas illa; secus vero, si æquatio subsistere nequeat.

142. Demus hujus rei exempla aliquot hoc loco. Ac primo quidem inquirendum sit, num differentia duorum quadratorum inæqualium æqualis sit ei, quod oritur, multiplicando summam suorum laterum per differentiam eorundem. Vocetur x latus quadrati majoris, & y latus quadrati minoris. Erit ergo $x^2 - y^2$ differentia quadratorum. Et quoniam summa laterum est $x + y$, & differentia eorundem laterum est $x - y$; erit $(x + y).(x - y)$ productum ex summa illa in istam differentiam. Quare, theoremate ad æqualitatem revocato, fiet $x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$: & propterea, quia æquatio ista subsistit, quum factum ex $x + y$ in

$x - y$

$x - y$ fit $x^2 - y^2$; verum erit theorema propositum.

143. Inquirendum fit quoque, num summa duorum quadratorum inæqualium fit semissis summæ ex duobus aliis quadratis, quorum alterum fiat ex summa laterum illorum, alterum ex differentia eorundem laterum. Vocetur rursus x latus quadrati majoris, & y latus quadrati minoris. Erit ergo $x^2 + y^2$ summa quadratorum. Quia vero summa laterum est $x + y$, & differentia eorundem laterum $x - y$; erunt $(x + y)^2$, & $(x - y)^2$ alia duo quadrata. Unde, reducto theoremate ad æqualitatem, fiet $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2$: proindeque, quia æquatio subsistit, quum duo quadrata $(x + y)^2$, $(x - y)^2$ simul sint $2x^2 + 2y^2$; verum erit theorema, de quo est quæstio.

144. Non dissimiliter theoremata geometrica ad analysis leges sunt revocanda. Quæratur, exempli gratia, num in quadrilatero ABCD, FIG. 16. inscripto in circulo, rectangulum sub diagonalibus AC, BD adæquet summam illorum, quæ fiunt ex lateribus oppositis. Sane, propter circulum, angulus BDA æqualis est angulo BCA. Quare, si fiat angulus CBE æqualis angulo ABD; erit, ut BD ad DA, ita BC ad CE; & consequenter, positis $BD = a$, $DA = b$, & $BC = c$, erit $CE = bc : a$. Quum autem æquales sint inter se, tam anguli BAC, BDC, quam anguli ABE, CBD; erit quoque, ut BD ad DC, ita BA ad AE. Unde, positis adhuc $DC = d$, & $BA = e$; erit $AE = de : a$, & $AC = (bc + de) : a$: proindeque, theoremate ad æqualitatem revocato, prodibit æquatio $bc + de = bc + de$, ubi es-

cognitas u...
bera ab om...

VI. Usus an...

141. R...
Recentiorum
Et quidem arti...
lu tione problem...
tibus, de quibu...
tis nominibus, ...
de scimus inter ...
dum est, quam ut...
proprietas, de qu...
tingat, ut subsistat...
eædem utrinque qua...
erit propri... illa ...
sistere neq...

142. ...
loco. Ac p...
differentia d...
qualis sit ei...
mam suoru...
dem. Voce...
tus quadrati...
rentia quadra...
rum est $x + y$...
est $x - y$; er...
ex summa illa...
theoremate ad...
$y^2 = (x + y)$...
æquatio ista sub...

[illegible] $a + b^4 : a^2$, ita a^2 ad b^2.
[illegible]ltiplicatis extremis, ac me-
[illegible]stituta inter producta; ha-
[illegible] $+ a^2b^2 = a^2b^2 - 2ab^2x$
[illegible] æquatione eædem utrin-
[illegible]unt; problema, de quo
[illegible] in theorema, putandum-
[illegible]tiæ puncta quæsito sa-
[illegible]facit, quod, ubi pun-
[illegible] B: tunc fit BN $= a$
[illegible] est semper $a^2 - 2ax$
[illegible] MB $= \surd(b^2 - 2ax$
[illegible] N cadit ad partem
[illegible]BN $= a + x$, & DN
[illegible]traque parte æqua-
[illegible] mutato reperietur.

[illegible] III.

[illegible], *ex Arith-*

[illegible]alytica, quam
[illegible]es in resolu-
[illegible]ulo litterali:
[illegible]ullis, cert[illegible]
[illegible]thodum illo[illegible]
[illegible]sunt exem[illegible]
[illegible]tet, quam[illegible]
[illegible]feremu[illegible]
[illegible] dep[illegible]

eædem utrinque quantitates exiſtunt.

145. Quæratur etiam, num in parallelogrammo ABCD quadrata ex diagonalibus AC, BD ſint æqualia quadratis, quæ fiunt ex lateribus AB, BC, CD, DA. Demittantur ſuper AD perpendiculares BE, CF; jamque erunt æquales, tum ipſæ BE, CF, cum interjectæ portiones AE, DF. Et quoniam triangulum BAD obtuſum habet angulum in A; erit quadratum ex BD æquale quadratis DA, AB una cum duplo rectanguli DAE. Quare, poſitis AB, vel CD $= a$; DA, vel BC $= b$; & AE, vel DF $= c$; erit quadratum ex BD $= a^2 + b^2 + 2bc$. Quumque, ob triangulum ADC, acutum habens angulum in D, quadratum ex AC una cum duplo rectanguli ADF ſit æquale quadratis CD, DA; erit quadratum ex AC $= a^2 + b^2 - 2bc$. Quare, reducto theoremate ad æqualitatem, fiet $a^2 + b^2 + 2bc + a^2 + b^2 - 2bc = a^2 + b^2 + a^2 + b^2$, hoc eſt $2a^2 + 2b^2 = 2a^2 + 2b^2$, ubi eædem utrinque quantitates occurrunt.

FIG. 11.

146. Verum quidem eſt, quod interdum theoremata, de quorum veritate agitur, nullam æqualitatem involvunt. Sed id nihil obſtat, quominus eodem artificio veritas ipſorum poſſit inquiri. Ita, ſi recta AB ſubinde ſit ſecta in C, ut portio AC ſit dupla alterius BC; & quæratur, num ſolidum ex AC quadrato in BC majus ſit ſolido, quod fit ex quadrato cujuſvis alterius portionis AD in reliquam BD: indagari id poterit hac ratione. Quoniam AC eſt dupla ipſius BC, ſi ponatur BC $= a$, fiet AC $= 2a$; adeoque ſolidum ex AC quadrato in BC erit $4a^3$. Unde eo res redit, ut inquiramus, num ſolidum aliud ex

FIG. 12.

AD

AD quadrato in BD minus sit, quam $4a^3$.

147. Hunc in finem ponatur CD $= x$. Jamque, si AD major sit, quam AC; erit AD $= 2a + x$, & BD $= a - x$. Unde solidum ex AD quadrato in BD fiet $(4a^2 + 4ax + x^2) \cdot (a - x)$, hoc est $4a^3 - 3ax^2 - x^3$, quod minus est, quam $4a^3$. Quod si vero AD minor sit, quam AC; tunc erit AD $= 2a - x$, & BD $= a + x$: proindeque solidum ex AD quadrato in BD fiet $(4a^2 - 4ax + x^2) \cdot (a + x)$, hoc est $4a^3 - 3ax^2 + x^3$, quod etiam minus est, quam $4a^3$. Nam, sicuti AB major est, quam CD; ita erit $3a$ major, quam x; & consequenter $3ax^2$ major, quam x^3.

148. Cæterum æquatio, in qua eædem sint quantitates, hinc inde existentes, reperitur quandoque in ipsa alicujus problematis resolutione. Et tunc argumento id nobis esse debet, problema illud ad theorema esse revocandum. Detur, exempli gratia, triangulum æquicrure ABC; & quærendum sit in area ejus punctum, ita, ut summa perpendiculorum, quæ exinde ducuntur super lateribus, sit æqualis altitudini ipsius trianguli AD. Esto E punctum istud, & demissis super lateribus perpendiculis EF, EG, EH, ponatur AD $= a$, EF $= x$, & EG $= y$. Fiet ergo EH $= a - x - y$. Jungantur postea rectæ AE, BE, CE; Jamque, si ponatur AB, vel BC, vel CA $= b$; erit triangulum AEB $= bx : 2$, triangulum BEC $= by : 2$, triangulum AEC $= (ab - bx - by) : 2$, & triangulum ABC $= ab : 2$. Unde, quia tria priora triangula simul quartum adæquant; erit $bx : 2 + by : 2 + (ab - bx - by) : 2 = ab : 2$, hoc est $ab = ab$, ubi eadem utrinque quantitas occurrit, FIG. 13.

149. Quum ergo ex resolutione propositi problematis orta sit æquatio, eandem hinc inde quantitatem involvens; vertendum est in theorema problema illud, putandumque omnia trianguli puncta quæsito satisfacere; adeo nempe, ut quocumque in loco capiatur punctum E, semper summa perpendiculorum EF, EG, EH æqualis sit altitudini AD. Nec difficile id erit ostendere. Nam, quum quatuor triangula AEB, BEC, AEC, ABC æquales habeant bases; eadem erunt inter se, ut altitudines EF, EG, EH, AD. Quare, componendo, summa trium priorum ad quartum erit, ut summa trium EF, EG, EH ad ipsam AD. Sed summa trium triangulorum AEB, BEC, AEC est æqualis triangulo ABC. Quare etiam perpendiculares EF, EG, EH simul æquales erunt ipsi AD.

150. Ut aliud ejusdem rei exemplum afferamus, sint tres rectæ AB, AC, AD continue proportionales; & oporteat in circumferentia circuli, cujus radius est AC, invenire punctum M, ita, ut rectæ MB, MD sint inter se in ratione rectarum AB, AC. Demittatur super AC perpendicularis MN, & ponatur AB $= a$, AC, vel AM $= b$, & AN $= x$. Erit ergo AD $= b^2 : a$, BN $= x - a$, & DN $= b^2 : a - x$; proindeque, sicuti ob triangulum rectangulum ANM, fit MN $= \sqrt{(b^2 - x^2)}$; ita, ob triangula rectangula BNM, DNM, erit MB $= \sqrt{(b^2 - 2ax + a^2)}$, & MD $= \sqrt{(b^2 - 2b^2x : a + b^4 : a^2)}$. Jam vero esse debet, ut MB ad MD, ita AB ad AC. Quare erit, ut $\sqrt{(b^2 - 2ax + a^2)}$ ad $\sqrt{(b^2 - 2b^2x : a + b^4 : a^2)}$, ita a ad b; & quadratis terminis omnibus, ut $b^2 - 2ax +$

FIG. 14.

a^2

a^2 ad $b^2 - 2b^2x : a + b^4 : a^2$, ita a^2 ad b^2.

151. Hinc, multiplicatis extremis, ac mediis, & æqualitate instituta inter producta; habebitur $b^4 - 2ab^2x + a^2b^2 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^4$. Unde, quia in ista æquatione eædem utrinque quantitates occurrunt; problema, de quo agitur, vertendum est in theorema, putandumque, omnia circumferentiæ puncta quæsito satisfacere. Nec ad rem facit, quod, ubi punctum N cadit inter A, & B; tunc fit BN $= a - x$. Nam ejus quadratum est semper $a^2 - 2ax + x^2$; adeoque semper erit MB $= \sqrt{(b^2 - 2ax + a^2)}$. Ubi vero punctum N cadit ad partem alteram ipsius A; tunc fiet BN $= a + x$, & DN $= b^2 : a + x$; adeoque in utraque parte æquationis terminus $2ab^2x$ signo mutato reperietur.

CAPUT III.

Exempla analysis Recentiorum, ex Arithmetica deprompta.

152. EXposita methodo analytica, quam adhibent Recentiores in resolutione problematum, mediante calculo litterali; ad rem modo erit, exemplis nonnullis, certo consilio electis, eandem illam methodum illustrare; nam hac in re magis prosunt exempla, quam præcepta. Et ut liquido constet, quam late pateat hæc methodus; exempla afferemus, non modo ex Arithmetica, & Geometria deprompta, verum etiam, quæ ad scientias physico-mathematicas pertinere videntur.

153. Primo igitur hoc capite resolvenda nobis erunt problemata nonnulla arithmetica. Hæc, ut plurimum, nullam habent difficultatem, nec ad ingenii vires exercendas multum conferunt. Statu enim quæstionis probe intellecto, & impositis rite nominibus, tam datis, quam incognitis numeris; eo res tota devolvitur, ut sensus quæstionis sermone, ut ita dicam, algebraico designetur. Nam, ubi sic ad algebraicos terminos conditiones ejus fuerint translatæ, illico tot habebuntur æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

I. *Problematum arithmeticorum exemplum primum.*

154. Sint ergo primum inveniendi tres numeri, quorum datæ sint summæ ex singulis binis. Vocetur primus numerorum x, secundus y, & tertius z. Designetur autem littera a summa ex primo, & secundo; littera b summa ex primo, & tertio; & littera c summa ex secundo, & tertio. Itaque, quia summa ipsorum x, & y est a; erit $x + y = a$. Pariterque, quia summa ipsorum x, & z est b; erit $x + z = b$. Ac denique, quia summa ipsorum y, & z est c; erit $y + z = c$. Quocirca, expressis algebraice singulis problematis conditionibus, reducetur problema ad tres istas æquationes $x + y = a$, $x + z = b$, & $y + z = c$.

155. Nunc ex tribus hisce æquationibus deducenda est alia, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam tantum incognitam contineat. Fiet id autem in hunc modum. Quo-

Quoniam postremæ duæ æquationes $x+z=b$, & $y+z=c$ dant, per transpositionem, $z=b-x$, & $z=c-y$; instituta æqualitate inter duos hosce valores incognitæ z, fiet $b-x=c-y$; atque adeo $y=c-b+x$. Sed prima æquatio $x+y=a$ exhibet quoque $y=a-x$. Quare erit $c-b+x=a-x$, unde eruitur $2x=a+b-c$, & $x=(a+b-c):2$.

156. Invento valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio ope ejus deducentur. Habetur enim in secunda æquatione $x+z=b$, sive $z=b-x$. Itaque, si in ea loco incognitæ x ponatur valor inventus * $(a+b-c):2$; fiet $z=(b+c-a):2$. Et similiter, quia in tertia æquatione habetur $y+z=c$, sive $y=c-z$, si in ea loco incognitæ z substituatur inventus valor $(b+c-a):2$, fiet $y=(a+c-b):2$. *Art. 155.

157. Trium ergo quæsitorum numerorum primus x est $(a+b-c):2$, secundus y est $(a+c-b):2$, & tertius z est $(b+c-a):2$. Nec dubium esse potest, quin tres isti numeri quæsito satisfaciant. Nam summa ex primo, & secundo est $(a+b-c):2+(a+c-b):2$, quæ reducitur ad a; summa ex primo, & tertio est $(a+b-c):2+(b+c-a):2$, quæ reducitur ad b; ac demum summa ex secundo, & tertio est $(a+c-b):2+(b+c-a):2$, quæ reducitur ad c.

158. Tres isti numeri ex tribus illis æquationibus, ad quas problema reductum est, erui etiam possunt hac ratione. Jam ex æquationes sunt * $x+y=a$, $x+z=b$, $y+z=c$. Ita- *Art. 155

que, additis iis ſubinde ſimul, ut fiat una ſumma ex omnibus incognitis, & ſumma alia ex omnibus cognitis; erit $2x + 2y + 2z = a + b + c$. Sed tertia æquatio $y + z = c$ duplicata dat $2y + 2z = 2c$. Quare, ſubſtitutione peracta, erit $2x + 2c = a + b + c$, atque adeo $x = (a + b - c) : 2$.

159. Non diſſimiliter invenientur valores aliarum incognitarum. Jam enim habetur * $2x + 2y + 2z = a + b + c$. Unde, quia ſecunda æquatio $x + z = b$ duplicata evadit $2x + 2z = 2a$, fiet per ſubſtitutionem $2y + 2b = a + b + c$, & conſequenter $y = (a + c - b) : 2$. Quumque prima æquatio $x + y = a$ duplicata det $2x + 2y = 2a$; erit adhuc per ſubſtitutionem $2z + 2a = a + b + c$, ac proinde $z = (b + c - a) : 2$.

* Art. 158.

160. Quod ſi denominatio incognitarum fieri velit *, ſecundum ipſas conditiones, appoſitas in problemate; obtineri poterit problematis reſolutio multo facilius in hunc modum. Vocetur rurſus a ſumma ex primo, & ſecundo; b ſumma ex primo, & tertio; & c ſumma ex ſecundo, & tertio. Ergo, ſi primus dicatur x; fiet $a - x$ ſecundus, & $b - x$ tertius. Unde ſumma ex ſecundo, & tertio erit $a + b - 2x$. Erat autem c ſumma iſta. Quare erit $a + b - 2x = c$; & conſequenter $x = (a + b - c) : 2$ prorſus, ut ſupra *.

* Art. 90.

* Art. 155.

161. Eſt itaque $(a + b - c) : 2$ primus numerus x. Unde ſecundus $a - x$ fiet $a - (a - b + c) : 2$, hoc eſt $(a + c - b) : 2$; & tertius $b - x$ evadet $b - (a - b + c) : 2$, ſive $(b + c - a) : 2$: proindeque etiam alii duo nu-

numeri tales oriuntur, quales paulo ante * sunt inventi. Nec dubium esse potest, quin hac ratione simplicior evadat problematis resolutio; quum statim deveniatur ad æquationem, quæ omnes problematis conditiones includit.

* art. 156.

162. Jam, ut indefinitam hujus problematis resolutionem ad casum aliquem specialem traducamus; esto 10 summa ex primo, & secundo; 8 summa ex primo, & tertio; ac demum 6 summa ex secundo, & tertio. Erit itaque $a = 10$, $b = 8$, & $c = 6$. Unde, quum sit $a + b - c = 12$, $a + c - b = 8$, & $b + c - a = 4$: capiendo semisses horum numerorum, fient 6, 4, 2 numeri quæsiti.

163. Similiter, si summa ex primo, & secundo statuatur 12; summa ex primo, & tertio 14; & summa ex secundo, & tertio 10: erit primus quæsitorum numerorum 8, secundus 4, & tertius 6. Atque ita quoque, si esse debeant primus, & secundus simul 7; primus, & tertius simul 5; secundus, & tertius simul 9: fiet 3 : 2 numerus primus, 11 : 2 numerus secundus, & 7 : 2 numerus tertius.

II. Problematum arithmeticorum exemplum secundum.

164. INveniendi sint modo tres numeri, quorum data sint producta ex singulis binis. Esto similiter x primus numerorum, y secundus, & z tertius. Vocetur autem a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque, quia id, quod ori-

tur ex multiplicatione ipſorum x, & y, eſt a^2; erit $xy = a^2$. Pariterque, quia id, quod producitur, multiplicando x per z, eſt b^2; erit $xz = b^2$. Atque ita demum, quia id, quod gignitur, multiplicando y per z, eſt c^2; erit $yz = c^2$.

165. Translatis ergo in hunc modum ad algebraicos terminos ſingulis problematis conditionibus; erunt $xy = a^2$, $xz = b^2$, $yz = c^2$ æquationes, ex quibus problematis ſolutio eſt deducenda. Deducetur vero ea, eruendo ex tribus illis æquationibus æquationem aliam, quæ omnes problematis conditiones includens, unicam dumtaxat incognitam comprehendat. Id vero obtineri poteſt hac arte.

166. Quoniam poſtremæ duæ æquationes $xz = b^2$, & $yz = c^2$ dant, ope diviſionis, $z = b^2 : x$, & $z = c^2 : y$; inſtituta æqualitate inter duos hoſce valores incognitæ z, erit $b^2 : x = c^2 : y$, atque adeo $y = c^2x : b^2$. Sed prima æquatio $xy = a^2$ exhibet quoque per diviſionem $y = a^2 : x$. Quare erit $c^2x : b^2 = a^2 : x$, hoc eſt $x^2 = a^2b^2 : c^2$, unde eruitur, per extractionem quadratæ radicis, $x = ab : c$.

167. Invento valore incognitæ x, valores aliarum incognitarum nullo negotio ope ejus eruentur. Habetur enim in ſecunda æquatione $xz = b^2$, ſive $z = b^2 : x$. Itaque, ſi in ea loco
*art.166. incognitæ x ponatur valor inventus * $ab : c$, fiet $z = bc : a$. Et ſimiliter, quia in tertia æquatione habetur $yz = c^2$, ſive $y = c^2 : z$; ſi in ea loco incognitæ z ſubſtituatur inventus valor $bc : a$, fiet $y = ac : b$.

168. Trium ergo quæſitorum numerorum pri-

primus x est $ab : c$, secundus y est $ac : b$, & tertius z est $bc : a$. Nec dubium esse potest, quin tres isti numeri proposito problemati satisfaciant. Nam productum ex primo, & secundo est $a^2bc : bc$, quod reducitur ad a^2; productum ex primo, & tertio est $ab^2c : ac$, quod reducitur ad b^2; & productum ex secundo, & tertio est $abc^2 : ab$, quod reducitur ad c^2.

169. Tres isti numeri ex tribus illis æquationibus, ad quas problema reductum est, colligi quoque possunt in hunc modum. Jam eæ æquationes sunt * $xy = a^2$, $xz = b^2$, $yz = c^2$. *art. 165.
Itaque, multiplicatis iis subinde inter se, ut fiat unum productum ex omnibus incognitis, & productum aliud ex omnibus cognitis; erit $x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$, sive, extracta hinc inde quadrata radice, $xyz = abc$.

170. Quia vero in tertia æquatione habetur $yz = c^2$; substitutione peracta, erit $c^2x = abc$, atque adeo $x = ab : c$. Pariterque, quia in secunda æquatione habetur $xz = b^2$; erit etiam substitutionis ope $a^2y = abc$, & consequenter $y = ac : b$. Atque ita demum, quia in prima æquatione habetur $xy = a^2$; erit adhuc per substitutionem $a^2z = abc$, ac proinde $z = bc : a$.

171. Quod si nomina quantitatibus imponantur *, secundum ipsas conditiones, appositas in problemate; obtineri poterit problematis resolutio multo facilius hac ratione. Vocetur rursus a^2 productum ex primo, & secundo; b^2 productum ex primo, & tertio; & c^2 productum ex secundo, & tertio. Itaque, si primus dicatur x; fiet $a^2 : x$ secundus, & $b^2 : x$ tertius. Unde productum ex secundo, & tertio erit $a^2b^2 : x^2$. *art. 90.

Erat autem c^2 productum istud. Quare erit $c^2 = a^2b^2 : x^2$; & consequenter $x = ab : c$, prorsus ut supra *.

*art. 166.

172. Est itaque $ab : c$ primus numerus x. Unde secundus $a^2 : x$ fiet $ac : b$, & tertius $b^2 : x$ evadet $bc : a$: proindeque etiam alii duo numeri tales oriuntur, quales paulo ante * prodiere. Nec dubium esse potest, quin hac ratione simplicior evadat problematis resolutio; quum statim deveniatur ad æquationem, quæ omnes problematis conditiones simul includit.

*art. 167.

173. Cæterum, ut hujus problematis resolutionem generalem uno, aut altero exemplo specialem reddamus; esto 10 productum ex primo, & secundo; 12 productum ex primo, & tertio; ac denique 15 productum ex secundo, & tertio. Erit itaque $a^2 = 10$, $b^2 = 12$, & $c^2 = 15$. Unde, quum sit $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{12}$, & $c = \sqrt{15}$; fiet $ab : c = \sqrt{8}$, $ac : b = \sqrt{(25 : 2)}$, & $bc : a = \sqrt{18}$: proindeque tres numeri quæsiti erunt $\sqrt{8}$, $\sqrt{(25 : 2)}$, & $\sqrt{18}$.

174. Similiter, si productum ex primo, & secundo statuatur 9; productum ex primo, & tertio 36; productum ex secundo, & tertio 4: erit $a^2 = 9$, $b^2 = 36$, & $c^2 = 4$. Quare, quum fiat $a = 3$, $b = 6$, & $c = 2$; erunt tres numeri quæsiti 9, 1, 4. Atque ita quoque, si esse debeat 5 productum ex primo, & secundo; 7 productum ex primo, & tertio; & 3 productum ex secundo, & tertio: fiet $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{7}$, & $c = \sqrt{3}$. Unde quæsiti tres numeri erunt $\sqrt{(35 : 3)}$, $\sqrt{(15 : 7)}$, & $\sqrt{(21 : 5)}$.

III. *Problematum arithmeticorum exemplum tertium.*

175. INveniendi sint tertio quotcumque numeri, qui datam continuo servent rationem inter se, & simul sumpti datam summam constituant. In hoc problemate duos casus distinguemus. Primus est, quum data ratio est arithmetica. Secundus vero, quum eadem ratio data est geometrica.

176. Quantum ad priorem casum, esto a summa data, sitque b excessus, quo quisque numerorum superat suum consequentem. Itaque, si duo tantum numeri sint inveniendi, & primus vocetur x; fiet secundus $x - b$; adeoque, quum summa utriusque sit a, erit $2x - b = a$, unde eruitur $x = (a + b) : 2$.

177. Quod si tres oporteat numeros invenire, excedentes se mutuo per b, simulque constituentes summam a, & adhuc primus vocetur x; fiet $x - b$ secundus, & $x - 2b$ tertius. Unde, quia summa omnium esse debet a; erit $3x - 3b = a$, & consequenter $x = (a + 3b) : 3$.

178. Sed, exhibente semper x numerum primum, comperiemus eadem ratione $x = (a + 6b) : 4$, ubi numeri inveniendi sunt quatuor; $x = (a + 10b) : 5$, quum iidem numeri sunt quinque; $x = (a + 15b) : 6$, quotiescumque multitudo numerorum est 6; atque ita deinceps.

179. Quod si valor ipsius x subinde exprimi velit, ut ejus expressio ad quamcumque numerorum multitudinem se extendat; id factu facile erit. Jam enim coefficiens ipsius b est sum-

ma tot numerorum naturalium, quot ſunt ipſi numeri inveniendi. Itaque, ſi multitudo horum vocetur m; fiet * ſumma totidem numerorum naturalium $(m^2 - m) : 2$: & propterea erit $x = (2a + m^2b - mb) : 2m$.

* lib. 1. art. 590.

180. Hinc, ſiquidem duo ſint numeri inveniendi; fiet $m = 2$, & conſequenter $x = (2a + 4b - 2b) : 4$, ſive etiam $x = (a + b) : 2$. Quod ſi vero ſint tres; erit $m = 3$, atque adeo $x = (2a + 9b - 3b) : 6$, hoc eſt $x = (a + 3b) : 3$. Atque ita demum, ſi quatuor oporteat numeros invenire; erit $m = 4$, ac proinde $x = (2a + 16b - 4b) : 8$, ſive $x = (a + 6b) : 4$.

181. Quantum ad ſecundum caſum, eſto rurſus a ſumma data, & $a : c$ exponens rationis geometricæ, quam quæſiti numeri ſervare debent inter ſe. Itaque, ſi duo tantum numeri ſint inveniendi, & primus vocetur x; fiet ſecundus $cx : a$. Quare, quum ſumma utriuſque eſſe debet a; erit $x + cx : a = a$, unde eruitur $x = a^2 : (a + c)$.

182. Quod ſi tres oporteat numeros invenire, ſervantes inter ſe eam rationem geometricam, quam habet a ad c, ſimulque conſtituentes ſummam a; & adhuc primus vocetur x; fiet ſecundus $cx : a$, & tertius $c^2x : a^2$. Unde, quia ſumma omnium eſſe debet a; erit $x + cx : a + c^2x : a^2 = a$; & conſequenter $x = a^3 : (a^2 + ac + c^2)$.

183. Sed, exhibente ſemper x numerum primum, comperiemus eadem ratione $x = a^4 : (a^3 + a^2c + ac^2 + c^3)$, ubi numeri inveniendi ſunt quatuor; $x = a^5 : (a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4)$, quum iidem numeri ſunt quinque;

$x =$

$x = a^6 : (a^5 + a^4c + a^3c^2 + a^2c^3 + ac^4 + c^5)$; quotiescumque multitudo numerorum est 6; atque ita deinceps.

184. Interim, si valor ipsius x subinde exprimi velit, ut ejus expressio ad quamcumque numerorum multitudinem se extendat; id factu facile erit. Jam enim denominator fractionis, cui x æqualis esse debet, est summa ex terminis ejus potestatis ex $a + c$, quæ habet pro suo exponente numerorum multitudinem, unitate minutam. Quare, si $m + 1$ sit multitudo ista; fient * termini illi $a^m + a^{m-1}c + a^{m-2}c^2 + a^{m-3}c^3 + a^{m-4}c^4 +$ &c.: & propterea erit generaliter $x = a^{m+1} : (a^m + a^{m-1}c + a^{m-2}c^2 + a^{m-3}c^3 + a^{m-4}c^4 +$ &c.) *lib. 1. art. 801.

185. Ut autem alibi * dictum est, termini illi eo usque protrahi debent, donec exponens potestatis, ad quam ascendit pars prior radicis a, est zero, seu nihil; hoc est, donec perventum fuerit ad $a^{m-m}c^m$, sive simpliciter ad c^m. Unde denominator fractionis, quam adæquat incognita x, esse debet summa omnium terminorum, qui ad istum inclusive terminantur. *lib. 1. art. 802.

186. Itaque, si duo sint numeri inveniendi; fiet $m = 1$, & consequenter $x = a^2 : (a + c)$. Quod si vero sint tres; erit $m = 2$, atque adeo $x = a^3 : (a^2 + ac + c^2$. Atque ita quoque, si quatuor oporteat numeros invenire; erit $m = 3$, ac proinde $x = a^4 : (a^3 + a^2c + ac^2 + c^3)$. Et eadem ratione, si multitudo numerorum inveniendorum sit 5; fiet $m = 4$, adeoque $x = a^5 : (a^4 + a^3c + a^2c^2 + ac^3 + c^4)$.

IV. *Problematum arithmeticorum exemplum quartum.*

187. INveniendum sit quarto, quoto annorum numero data pecuniæ summa datum subeat incrementum, convertendo usuram cujusque anni in sortem principalem. Esto a summa pecuniæ data, & b usura ejus in anno. Subeat vero eadem illa summa, per conversionem usurarum in sortem, incrementum c tempore x.

188. Qiua igitur primo anno usura sortis a est b; conversa usura ista in sortem, fiet initio secundi anni $a+b$ sors ipsa. Unde, faciendo, ut a ad b, ita $a+b$ ad quartam proportionalem; erit $(ab+b^2):a$ usura sortis in secundo anno; & consequenter, per additionem alterius hujus usuræ, ipsa sors initio tertii anni erit $a+b+(ab+b^2):a$, hoc est $(a^2+2ab+b^2):a$, sive etiam $(a+b)^2:a$.

189. Hinc rursus, faciendo, ut a ad b, ita $(a^2+2ab+b^2):a$ ad quartam proportionalem; erit $(a^2b+2ab^2+b^3):a^2$ usura sortis in tertio anno: proindeque, convertendo semper usuram in sortem, erit $(a^2+2ab+b^2):a+(a^2b+2ab^2+b^3):a^2$, hoc est $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3):a^2$, sive etiam $(a+b)^3:a^2$ valor sortis, elapso tertio anno, & quarto inchoante.

190. Eadem ratione ostendemus, continua usurarum in sortem conversione, fieri sortem ipsam $(a+b)^4:a^3$ elapso quarto anno, $(a+b)^5:a^4$ elapso quinto anno, $(a+b)^6:a^5$ elapso

pso sesto anno, atque ita deinceps. Unde, quum totidem effluxi sunt anni, quot designat x; prodibit eadem sors $(a+b)^x : a^{x-1}$.

191. Jam, effluxis totidem annis, quot refert x, sors data a subire debet incrementum c. Quare in fine eorum annorum sors fieri debet $a+c$. Erat autem * $(a+b)^x : a^{x-1}$. Itaque, instituta æqualitate inter duas istas unius ejusdemque quantitatis expressiones, habebitur æquatio $(a+b)^x : a^{x-1} = a+c$, sive etiam $(a+b)^x = (a+c)a^{x-1}$. *art. 190.

192. Ut autem ex ista æquatione valorem incognitæ x eruere valeamus, ad quantitates logarithmicas confugere opus est. Nimirum, quum sit $(a+b)^x = (a+c)a^{x-1}$; erit etiam $l.(a+b)^x = l.(a+c)a^{x-1}$. Est autem * $l.(a+b)^x = xl.(a+b)$, & $l.(a+c)a^{x-1} = l.(a+c)+(x-1)l.a = l.(a+c) + xl.a - l.a$. Quare erit quoque $xl.(a+b) = l.(a+c)+xl.a - l.a$; atque adeo, transponendo, $xl.(a+b) - xl.a = l.(a+c) - l.a$. *lib. 1. art. 947.

193. Quum itaque habeatur $xl.(a+b) - xl.a = l.(a+c) - l.a$; divisa utraque æquationis parte per $l.(a+b) - l.a$, fiet $x = [l.(a+c) - l.a] : [l.(a+b) - l.a]$: proindeque quæsitus annorum numerus x habebitur, subducendo logarithmum datæ sortis a, tum ex logarithmo ipsius $a+c$, cum ex logarithmo ipsius $a+b$, & dividendo residuum primum per residuum secundum.

194. Cæterum in resolutione hujus problematis supposuimus, sortem datam a subire datum incrementum c exacto annorum numero.

Sed

Sed fieri poteſt, ut ea ſubeat tale incrementum, non modo annis aliquot elapſis, ſed aliqua etiam ſubſequentis anni portione. Unde, qua ratione cognoſci id poſſit, tum item definiri portio illa, ſi quæ ſit, anni ſubſequentis; non abs re erit, hoc loco ſubnectere.

195. Nimirum, ſi in reſolutione problematis quotiens, qui ex * ea diviſione oritur, ſit numerus integer; tunc data ſors a ſubibit datum incrementum c tot præciſe annis elapſis, quot integer ille numerus deſignat. Sed, ſi numero integro adhæreat etiam fractio aliqua; tunc indicio id nobis eſſe debet, nonnihil dati incrementi c ſubire ſortem a in aliqua ſubſequentis anni portione, quam determinare licebit in hunc modum.

*art. 193.

196. Eſto n numerus integer annorum inventus. Ergo, per converſionem uſurarum in ſortem, elapſis annis n, ſors evadet * $(a+b)^n : a^{n-1}$: proindeque, ſi ex $a+c$ ſubducatur $(a+b)^n : a^{n-1}$, fiet $a+c-(a+b)^n : a^{n-1}$ portio dati incrementi c, quam ſubire debet ſors a in invenienda anni portione, quæque intra eandem anni portionem uſura eſſe debet ſortis $(a+b)^n : a^{n-1}$.

*art. 190.

197. Jam vocetur y portio anni quæſita. Et profecto, ſi a in anno uno dat b, neceſſe eſt, ut $(a+b)^n : a^{n-1}$ in ea anni portione, quam deſignat y, det $by(a+b)^n : a^n$. Dabat autem * $a+c-(a+b)^n : a^{n-1}$. Quare, inſtituta æqualitate, erit $by(a+b)^n : a^n = a+c-(a+b)^n : a^{n-1}$, hoc eſt $by(a+b)^n = a^{n+1}+ca^n-a(a+b)^n$: unde eruitur $y = (a^{n+1}+ca^n) : b(a+b)^n - a : b$.

*art. 196.

198.

198. Ut autem solutionem hujus problematis generalem ad exemplum aliquod speciale traducamus, esto 100 data pecuniæ summa, & 5 usura ejus in anno; sitque 18 incrementum, quod subire debet. Fiet ergo $a = 100$, $b = 5$, $c = 18$, $a + b = 105$, & $a + c = 118$. Unde, quum sit $l.(a + c) = 2071882o$, $l.(a + b) = 20211893$, & $l.a = 20000000$; erit $l.(a + c) - l.a = 71882o$, & $l.(a + b) - l.a = 211893$.

199. Jam, diviso 718820 per 211893, fit quotiens numerus integer 3 una cum quadam fractione. Quare, non modo tribus integris annis, sed aliqua etiam quarti anni portione, summa pecuniæ 100 subibit incrementum 18. Plane vero, quum fiat $n = 3$; erit $(a^{n+1} + ca^n) : b(a + b)^n = 20 + 3580 : 9261$. Unde, quum sit $a : b = 20$; erit ea anni portio $3580 : 9261$.

200. Et quidem, sicuti 100 dat 5, ita 105 dabit $5 + 1 : 4$, & $110 + 1 : 4$ dabit $5 + 1 : 4 + 1 : 80$. Unde incrementum, quod subit tribus annis snmma pecuniæ 100, per conversionem usurarum in sortem, est $15 + 3 : 4 + 1 : 80$, fietque adeo in fine eorum annorum $115 + 3 : 4 + 1 : 80$. Profecto autem, si 100 in anno uno dat 5; necesse est, ut $115 + 3 : 4 + 1 : 80$ in anni portione $3580 : 9261$ det $2 + 19 : 80$.

V. Problematum arithmeticorum exemplum quintum.

201. Oporteat demum definire, quoto annorum numero extinguatur data pecuniæ summa, cujus annua usura unà cum

cum portione ipsius sortis pro annua pensione data persolvenda debeat impendi. Esto a summa pecuniæ data, b usura ejus in anno, & c pensio annua persolvenda, quæ major esse debet, quam b, ut aliquid ex ipsa sorte detrahi possit.

202. Quum ergo usura b ipsius sortis a non sufficiat persolvendæ pensioni c; subducendum erit ex sorte a in fine primi anni $c - b$; adeoque sors ipsa in secundo anno erit $a - c + b$. Plane vero, faciendo, ut a ad b, ita $a - c + b$ ad quartam proportionalem; erit $(ab - bc + b^2) : a$ usura sortis reliquæ in secundo anno.

203. Hæc vero persolvendæ pensioni c multo minus sufficiet. Itaque in fine secundi anni adhuc ex sorte, quæ erat $a - c + b$ deducendum erit $(ac - ab + bc - b^2) : a$. Quare sors in tertio anno erit $(a^2 - 2ac + 2ab - bc + b^2) : a$: & propterea, faciendo rursus, ut a ad b, ita $(a^2 - 2ac + 2ab - bc + b^2) : a$ ad quartam proportionalem; fiet $(a^2b - 2abc + 2ab^2 - b^2c + b^3) : a^2$ usura sortis in tertio anno.

204. Hinc rursus, quia usura ista persolvi nequit pensio annua c; in fine tertii anni sors, quæ erat $(a^2 - 2ac + 2ab - bc + b^2) : a$, minuenda erit quantitate $(a^2c - a^2b + 2abc - 2ab^2 + b^2c - b^3) : a^2$. Quare evadet $(a^3 - 3a^2c + 3a^2b - 3abc + 3ab^2 - b^2c + b^3) : a^2$; atque adeo usura ejus in quarto anno reperietur esse $(a^3b - 3a^2bc + 3a^2b^2 - 3ab^2c + 3ab^3 - b^3c + b^4) : a^3$: quo fiet, ut in fine quarti anni sors minuenda sit quantitate $(a^3c - a^3b + 3a^2bc - 3a^2b^2 + 3ab^2c - 3ab^3 + b^3c - b^4) : a^3$.

205. Quemadmodum ergo diminutio, quam pa-

patitur fors in fine primi anni eft $c - b$; ita eadem erit $(ac - ab + bc - b^2) : a = (c - b).(a + b) : a$ in fine fecundi anni; $(a^2c - a^2b + 2abc - 2ab^2 + b^2c - b^3) : a^2 = (c - b).(a^2 + 2ab + b^2) : a^2 = (c - b).(a + b)^2 : a^2$ in fine tertii anni; $(a^3c - a^3b + 3a^2bc - 3a^2b^2 + 3ab^2c - 3ab^3 + b^3c - b^4) : a^3 = (c - b).(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : a^3 = (c - b).(a + b)^3 : a^3$ in fine quarti anni; atque ita deinceps.

206. Jam, ficuti iftæ fortis diminutiones conftituunt progreffionem geometricam, quæ incipiens a $c - b$ decrefcit in ea ratione, quam habet a ad $a + b$; ita liquido patet, tot præcise annis extinguendam effe fummam pecuniæ a, quot ex terminis hujus progreffionis adæquant eandem fummam a. Unde, fi vocetur x numerus annorum, oportebit, a æqualem effe omnibus iis prædictæ progreffionis terminis, quæ inclufive terminantur ad $(c - b).(a + b)^{x-1} : a^{x-1}$.

207. Per ea autem, quæ præcedente libro * funt oftenfa, fumma tot terminorum præfatæ progreffionis eft $(c - b).(a + b)^x : ba^{x-1} - ac : b + a$. Quare, inftituta æqualitate, habebitur æquatio $(c - b).(a + b)^x : ba^{x-1} - ac : b + a = a$, hoc eft $(c - b).(a + b)^x : ba^{x-1} = ac : b$, five etiam $(c - b).(a + b)^x = ca^x$; ex qua tamen æquatione ut valorem incognitæ x eruere valeamus, ad quantitates logarithmicas confugere opus eft.

*lib. 1. art. 515.

208. Nimirum, quum fit $(c - b).(a+b)^x = ca^x$; erit quoque $l.[(c - b).(a + b)^x] = l.ca^x$. Eft autem * $l.[(c - b).(a + b)^x] = l.$

*lib. 1. art. 947.

$= l.(c-b)+l.(a+b)^x = l.(c-b+$ $xl.(a+b)$, & $l.ca^x = l.c+l.a^x = l.c+$ $xl.a$. Quare erit pariter $l.(c-b)+xl.(a+b) = l.c+xl.a$; atque adeo, transponendo, $xl.(a+b)-xl.a = l.c-l.(c-b)$. Unde, quum fiat $x = [l.c-l.(c-b)]:[l.(a+b)-l.a]$, habebitur quæsitus annorum numerus x, si differentia logarithmorum, qui referuntur ad c, & $c-b$, dividatur per differentiam logarithmorum, qui referuntur ad $a+b$, & a.

209. Cæterum in hujus etiam problematis resolutione suppofuimus, datam pecuniæ summam a exhauriri exacto annorum numero. Sed fieri hic pariter poteſt, ut ea extinguatur, non modo annis aliquot elapsis, sed aliqua etiam subsequentis anni portione. Unde, qua ratione cognosci id possit, tum item definiri portio illa, si quæ sit, anni subsequentis; operæ pretium, est hoc loco subnectere.

210. Plane, si in resolutione problematis quotiens, qui ex ea * divisione oritur, sit numerus integer; tunc data pecuniæ summa a extinguetur tot præcise annis elapsis, quot integer ille numerus designat. Sed, si numero integro adhæreat etiam fractio aliqua; tunc indicio id nobis esse debet, nonnihil ejus summæ extingui in aliqua subsequentis anni portione, quam determinare licebit in hunc modum.

*art.208.

211. Esto n numerus integer annorum inventus. Ergo diminutio, quam patitur summa pecuniæ a, elapsis annis n, erit * $(c-b).(a+b)^n : ba^{n-1} - ac:b+a$: proindeque in fine eorum annorum reducetur ad $ac:b-$

*art.207.

(a+

$(a+b)^n . (c-b) : ba^{n-1}$. Hinc, si quæsita anni portio vocetur y, usura ejus in hac anni portione erit $cy - (a+b)^n . (c-b) y : a^n$; adeoque eadem una cum ipsius usura erit $ac : b - (a+b)^n . (c-b) : ba^{n-1} + cy - (a+b)^n . (c-b) y : a^n$.

212. Jam pensio, quæ esse debet c in anno uno, reducitur ad cy in ea anni portione, quam designat y. Unde, quum tota illa summa huic pensioni persolvendæ par esse debeat, habebitur æquatio $ac : b - (a+b)^n . (c-b) : ba^{n-1} + cy - (a+b)^n . (c-b) y : a^n = cy$, hoc est $ac : b - (a+b)^n . (c-b) : ba^{n-1} = (a+b)^n . (c-b) y : a^n$, unde eruitur $y = ca^{n+1} : b (a+b)^n . (c-b) - a : b$.

213. Ut autem solutionem hujus problematis generalem ad speciale aliquod exemplum traducamus, esto 150 data pecuniæ summa, & 10 usura ejus in anno; sitque 50 pensio annua persolvenda. Fiet ergo $a = 150$, $b = 10$, $c = 50$, $c - b = 40$, & $a + b = 160$. Unde, quum sit $l . a = 21760913$, $l . c = 16989700$, $l . (c-b) = 16020600$, & $l . (a+b) = 22041200$; erit $l . c - l . (c-b) = 969100$, & $l . (a+b) - l . a = 280287$.

214. Jam, diviso 969100 per 280287, fit quotiens numerus integer 3 una cum quadam fractione. Quare, non modo tribus annis, sed aliqua etiam quarti anni portione, extinguetur summa pecuniæ 150. Plane vero, quum fiat $n = 3$, erit $ca^{n+1} : b (a+b)^n . (c-b) = 15 + 7365 : 16384$. Unde, quum sit $a : b = 15$, erit ea anni portio $7365 : 16384$.

215. Et quidem, si fiat progressio geome-

trica, quæ incipiens a 40 decrescat in ea ratione, quam habet 150 ad 160, sive 15 ad 16; fiet 42 + 2 : 3 secundus terminus, & 45 + 23 : 45 terminus tertius. Unde, quum summa trium horum terminorum sit 128 + 8 : 45, portio, quæ remanet extinguenda, erit 21 + 37 : 45. Et quoniam usura hujus in anni portione 7365 : 16384 est (982 . 491) : (45 . 16384); eadem una cum ipsius usura erit 21 + 37 : 45 + (982 . 491) : (45 . 16384), hoc est 22 + 7802 : 16384, quæ est portio pensionis persolvenda in anni parte 7365 : 16384.

CAPUT IV.

Exempla analysis Recentiorum, ex Geometria desumpta.

216. Vidimus præcedenti capite, problemata arithmetica, ope analysis Recentiorum, esse valde solutu facilia; quum facillimum sit, ipsas problematis conditiones ad algebraicos terminos transferre. Sed non perinde se res habet in resolutione eorum problematum, quæ Geometriam respiciunt. Quæ enim in iis quæruntur, pendent ut plurimum ex variis linearum positionibus, & relationibus complexis. Quare ulteriore opus est artificio, ut ad terminos algebraicos deduci possint.

217. Et sane, quo possit Analysta ad æquationes algebraicas problemata geometrica revocare, necesse est, ut Geometriæ calleat Elementa, figurarumque geometricarum proprietates, & ac-

& accidentia perspecta habeat, ac explorata. Sed Trigonometria, & doctrina Datorum eum quoque latere non debent. Nam persæpe in peragendo calculo, non ea, quæ proprie data sunt; sed, quæ ex iis consequuntur, debent adhiberi.

I. *Problematum geometricorum exemplum primum.*

218. PRimo igitur ex dato puncto D ducenda proponatur recta DBC, quæ cum aliis duabus AB, AC, positione datis, triangulum constituat ABC datæ magnitudinis. Ponatur jam factum, & ducatur per punctum D recta DE, parallela ipsi AB. Ergo, quia datur punctum D, & datur quoque positione recta AB; dabitur distantia parallelarum AB, DE: proindeque, demisso super DE perpendiculo AF, data erit longitudo ipsius AF. FIG. 15.

219. Jam, propter lineas positione datas AB, AC, datur angulus BAC, sive DEC. Quare in triangulo rectangulo AEF dabuntur anguli omnes: & propterea, quum detur latus unum AF, per Trigonometriam dabitur quoque hypothenusa AE. Denique, quia datur punctum D, & datur quoque positione recta AC; dabitur etiam perpendiculum DG, quod metitur distantiam puncti D a recta AC.

220. Demittatur nunc super AC perpendicularis BH, & ponatur AE $= a$, DG $= b$, AC $= x$, & BH $= y$. Erit ergo tota CE $= a + x$. Et quoniam similia sunt triangula CBA, CDE; erit, ut AC ad CE, ita AB ad DE. Sed, propter similitudinem triangulorum ABH, EDG,

AB est ad DE, ut BH ad DG. Itaque erit ex æquali, ut AC ad CE, ita BH ad DG; hoc est in terminis algebraicis, ut x ad $a+x$, ita y ad b. Unde, per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem, habebitur æquatio $bx = ay + xy$.

221. Notum est porro ex Elementis, rectangulum ex BH in AC, duplum esse trianguli ABC. Quare, si area istius trianguli, velut data, vocetur bc, habebitur hæc alia æquatio $xy = 2bc$: & propterea, singulis conditionibus, in problemate appositis, algebraice designatis, reducetur problema ipsum ad duas hasce æquationes $bx = ay + xy$, & $xy = 2bc$: ex quibus modo deducenda est tertia, quæ singulas problematis conditiones includens, unicam tantum incognitam comprehendat.

222. Id vero est facile factu. Quum enim in prima æquatione habeatur $bx = ay + xy$; divisa utraque ejus parte per $a+x$, fiet $bx:(a+x) = y$. Sed secunda æquatio $xy = 2bc$ præbet quoque $y = 2bc:x$. Quare, instituta æqualitate inter duos hosce valores ejusdem incognitæ y, orietur $bx:(a+x) = 2bc:x$, hoc est $bx^2 = 2abc + 2bcx$, sive etiam $x^2 - 2cx = 2ac$: cui si utrinque addatur c^2, & deinde ex utraque parte extrahatur quadrata radix; habebitur demum $x - c = \surd(2ac + c^2)$, & $x = c + \surd(2ac + c^2)$.

223. Quod si locus puncti dati fuerit in recta AB, positione data, velut in B; tunc longe simplicior erit æquatio, ad quam problema reducitur. Quum enim in hoc casu perpendiculum BH metiatur distantiam dati puncti B a re-

cta

cta AC, quæ est similiter positione data; utique dabitur longitudo ipsius BH. Quocirca, si referente adhuc bc aream trianguli ABC datam, ponatur BH $= c$, & AC $= x$; fiet æquatio $bx = 2bc$, sive etiam $x = 2c$.

224. Hæc autem æquatio colligi quoque potest ex ipsa illa, superius * inventa, $x^2 - 2cx = 2ac$. Nam, ubi punctum D accedit ad punctum B, perpendiculum DG coincidet cum perpendiculo BH; atque adeo recta DE cadet etiam super recta AB: proindeque, quia evanescit recta AE $= a$, satis erit, in illa æquatione delere terminum $2ac$. Eo autem deleto, relinquitur $x^2 - 2cx = 0$, hoc est $x^2 = 2cx$, sive etiam $x = 2c$, prorsus ut antea *. *art. 222. *art. 223.

225. Locari quoque potest punctum D, per quod ducenda est recta, intra angulum BAC; & tunc adhuc eadem est problema solvendi ratio. Tantum notari debet, quod recta AE in hoc casu cadit ad partem contrariam. Unde positis, ut supra *, AE $= a$, & AC $= x$; fiet CE $= x - a$; atque adeo æquatio, problematis conditiones omnes includens, erit $2cx - x^2 = 2ac$. Id vero non exiguam in problemate mutationem facit. *art. 220.

226. Quum enim sit $2cx - x^2 = 2ac$; erit, per transpositionem, $x^2 - 2cx = - 2ac$. Unde, addito rursus utrinque c^2, & extracta hinc inde quadrata radice; fiet $x - c = \sqrt{(c^2 - 2ac)}$, & $x = c + \sqrt{(c^2 - 2ac)}$. Plane vero, si fuerit $2a$ major, quam c; erit $\sqrt{(c^2 - 2ac)}$, quantitas imaginaria *: & propterea, quum imaginarius fiat valor incognitæ x, problema, de quo agitur, solutu impossibile erit. *lib. 1. art. 316.

227. Itaque, quum punctum datum D locatur intra angulum BAC, tunc tantum problema solvi poterit, quum $2a$ non est major, quam c; sive etiam, quum $2ab$ non est major, quam bc. Unde, quia $2ab$ est duplum rectanguli, quod fit ex AE in DG, & bc est area trianguli ABC: illud in problemate apponere oportet, ut data area trianguli non sit minor duplo rectanguli ex AE in DG.

II. Problematum geometricorum exemplum secundum.

FIG. 16. 228. Oporteat secundo, dato quadrato ABCD, producere latus AB in directum versus E, ita, ut, juncta DE, fiat intercepta portio EF datæ longitudinis. Ponatur jam factum, & sit AB, vel AD $= a$, EF $= c$, BE $= x$, & BF $= y$. Erit ergo tota AE $= a + x$. Et quoniam similia sunt triangula ADE, BFE; erit, ut AD ad BF, ita AE ad BE; hoc est in terminis algebraicis, ut a ad y, ita $a + x$ ad x. Unde, per notissimam quantitatum proportionalium proprietatem, habebitur æquatio $ax = ay + xy$.

229. Quia vero triangulum EBF rectum habet angulum in B; erit quadratum hypothenusæ EF æquale quadratis crurum BE, BF; hoc est $c^2 = x^2 + y^2$. Quare, translatis ad terminos algebraicos singulis propositi problematis conditionibus, reducitur problema ipsum ad duas hasce æquationes $ax = ay + xy$, & $c^2 = x^2 + y^2$: ex quibus modo eruenda est tertia, quæ includens omnes problematis conditiones, uni-

unicam tantum incognitam comprehendat.

230. Ut id præstemus, prioris æquationis $ax = ay + xy$ utraque pars dividatur primum per $a + x$; jamque erit $ax : (a + x) = y$. Elevetur postea utraque pars ad quadratum; & fiet $a^2x^2 : (a^2 + 2ax + x^2) = y^2$. Sed secunda æquatio $c^2 = x^2 + y^2$ præbet $c^2 - x^2 = y^2$. Quare, instituta æqualitate inter duos hosce valores ejusdem y^2, habebitur $a^2x^2 : (a^2 + 2ax + x^2) = c^2 - x^2$, cujus forma concinnior erit $x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - c^2x^2 - 2ac^2x = a^2c^2$.

231. Potest etiam problema resolvi, quærendo valorem lineæ DE. Quem in finem, manentibus adhuc AB, vel AD $= a$, & EF $= c$, ponatur DE $= x$. Erit ergo DF $= x - c$. Et quoniam, ob triangula similia ADE, BFE, DE est ad FE, ut AD ad BF: si fiat, ut x ad c, ita a ad quartam; invenietur BF $= ac : x$. Quumque, ob parallelas AD, BF, DF est ad FE, ut AB ad BE: si fiat, ut $x - c$ ad c, ita a ad quartam; invenietur BE $= ac : (x - c)$.

232. Jam triangulum EBF rectum habet angulum in B. Itaque quadratum hypothenusæ EF æquale erit quadratis crurum BF, BE: proindeque, revocata æqualitate ista ad algebraicos terminos, habebitur æquatio $c^2 = a^2c^2 : x^2 + a^2c^2 : (x^2 - 2cx + c^2)$: quæ, sicuti, multiplicatis terminis omnibus per x^2, evadit $c^2x^2 = a^2c^2 + a^2c^2x^2 : (x^2 - 2cx + c^2)$; ita, divisis per c^2, & multiplicatis rursus per $x^2 - 2cx + c^2$, fiet $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2x^2$, sive $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$.

233. Præstat autem in resolutione proble-

matis, quærere potius valorem lineæ DE, quam lineæ BE. Nam, quærendo valorem lineæ BE, ut vidimus supra *, sese nobis offert æquatio $x^4 + 2ax^3 + 2a^2x^2 - c^2x^2 - 2ac^2x = a^2c^2$, ex qua non ita facile ille valor eruitur. Sed, quærendo valorem lineæ DE, incidimus in æquationem $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx = a^2c^2$, ex qua nullo negotio quæsitus valor infertur.

*art. 230.

234. Si enim utrique æquationis parti adjiciatur a^4, habebitur hæc alia $x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2c^2 + a^4$, in qua pars prior est quadratum perfectum. Quare, extrahendo hinc inde quadratam radicem, fiet $x^2 - cx - a^2 = a\surd(c^2 + a^2)$, sive $x^2 - cx = a^2 + a\surd(c^2 + a^2)$. Et si, addito utrinque $c^2:4$, rursus quadrata radix ex utraque parte extrahatur; habebitur denum $x - c:2 = \surd[a^2 + a\surd(c^2 + a^2) + c^2:4]$, & $x = c:2 + \surd[a^2 + a\surd(c^2 + a^2) + c^2:4]$.

235. Sed adhuc simplicior futura erit resolutio æquationis, ad quam problema reducitur, si secta EF bifariam in puncto G, quæratur valor lineæ DG. Nam, manentibus semper AB, vel AD $= a$, & EF $= c$, si ponatur DG $= x$; fiet tota DF $= x + c:2$, & portio DF $= x - c:2$. Unde æquatio, in qua omnes problematis conditiones includuntur, erit $x^4 - 2a^2x^2 - c^2x^2:2 = a^2c^2:2 - c^4:16$.

236. Esse vero solutu faciliorem æquationem istam, liquet abunde. Si enim utrique ejus parti adjiciatur $a^4 + a^2c^2:2 + c^4:16$; habebitur $x^4 - 2a^2x^2 - c^2x^2:2 + a^4 + a^2c^2:2 + c^4:16 = a^2c^2 + a^4$. Quare, extracta utrinque

que quadrata radice, erit $x^2 - a^2 - c^2 : 4 = a\sqrt{(c^2 + a^2)}$, sive $x^2 = a^2 + c^2 : 4 + a\sqrt{(a^2 + a^2)}$; & consequenter, rursus per extractionem quadratæ radicis, fiet $x = \sqrt{[a^2 + c^2 : 4 + a\sqrt{(c^2 + a^2)}]}$.

237. Cæterum in resolutione propositi problematis, sive quæratur valor lineæ BE, aut AE, sive valor lineæ DE, aut DG; semper quidem talis prima facie prodibit æquatio, ut in ea maximæ incognitæ potestas ad quatuor dimensiones ascendat. Sed ejusdem formæ erit etiam æquatio, si quæratur valor, sive rectæ BF, sive rectæ CF, quarum utraque determinat quoque id, quod in problemate quæritur.

238. Interim quæsitum ejusdem problematis licebit etiam per tales lineas determinare, ut æquationes, valores earum linearum continentes, statim duarum dimensionum oriantur. Et, quia id luculenter ostendit, quanta sit unum, idemque problema solvendi copia; non gravabimur, alias istas ejusdem problematis solutiones hoc loco proferre: concipiendo etiam paulo aliter problema cum Newtono, ut nobis esse possit velut tertium exemplum problematum geometricorum.

III. Problematum geometricorum exemplum tertium.

239. Oporteat tertio, angulum rectum EBF subtendere recta data EF, quæ transeat per datum punctum D, æquidistans a lineis, rectum angulum continentibus. Ponatur jam factum; &, secta EF bifariam in G, FIG. 16.

G, jungantur rectæ BG, BD. Quumque angulus EBF sit rectus; semicirculus, descriptus super recta EF, velut diametro, transibit per punctum B: proindeque tres rectæ BG, EG, FG æquales erunt inter se.

240. Id quum ita sit, locabitur punctum G in circumferentia circuli, qui describitur centro B, & intervallo semissis ipsius EF. Unde, si super BD perpendicularis demittatur GH; quæri potest in resolutione problematis valor rectæ DH: ut quæ determinat quæsitum problematis, si descripto circulo illo, erigatur ex puncto H recta, ipsi DH perpendicularis, quæ circumferentiam ejus circuli alicubi secet.

241. Jam, ad inveniendum valorem rectæ DH, considero conditionem alteram, appositam in problemate, nempe quod punctum D æquidistat a rectis AE, BC, comprehendentibus angulum rectum EBF. Hinc enim sequitur, angulum ABD semirectum esse; atque adeo angulum HBI æqualem esse angulo BIH, seu EIG. Unde, quia angulus EBG æqualis est angulo BEG; erit totus angulus GBH æqualis duobus EIG, BEG; & consequenter æqualis angulo DGH, cui illi duo simul sumpti sunt æquales.

242. Hinc æquiangula erunt triangula duo rectangula DHG, GHB: proindeque, quum DH sit ad GH, ut GH ad BH; erit GH quadratum æquale rectangulo DHB: atque adeo, apposito communi quadrato ex BH, erit summa quadratorum BH, GH, sive etiam quadratum ex BG æquale rectangulo DHB, una cum BH quadrato. Unde, positis $DB = a$, $BG = b$, & $DH = x$, habebitur æquatio $2x^2 - 3ax + a^2 = b^2$.

$= b^2$, hoc est $x^2 - 3ax : 2 = (b^2 - a^2) : 2$, ex qua eruitur $x - 3a : 4 = \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)}$, & $x = 3a : 4 + \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)}$.

243. Quæri etiam potest pro resolutione problematis, valor rectæ BH : quo casu, tametsi æquatio ad duas dimensiones assurgat, pauciores tamen terminos involvet. Positis namque adhuc $AB = a$, & $BG = b$, si fiat $BH = x$, æquatio erit $ax + 2x^2 = b^2$, hoc est $x^2 + ax : 2 = b^2 : 2$. Unde, addito utrinque $a^2 : 16$, & extracta hinc inde quadrata radice, erit $x + a : 4 = \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)}$, & $x = \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)} - a : 4$. Et sane, quum valor totius DH inventus sit supra * $3a : 4 + \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)}$; omnino *art. 242. necesse est, ut dempta $DB = a$, fiat $BH = \sqrt{(b^2 : 2 + a^2 : 16)} - a : 4$.

244. Sed videamus, num æquatio duarum dimensionum, pro resolutione propositi problematis alia quoque ratione possit inveniri. Hunc in finem super DE perpendicularis erigatur EK, quæ rectæ DC, ipsi BE parallelæ, occurrat in K. Et quoniam angulus DEK rectus est, semicirculus, descriptus super DK, velut diametro, transibit per punctum E. Unde, quia idem punctum E reperitur quoque in recta AB, quæri potest valor rectæ DK : ut quæ determinat quæsitum problematis, si super ea, velut diametro, descripto semicirculo, protrahatur AB, donec semicirculi hujus circumferentiam alicubi secet.

245. Jam, ad inveniendum valorem rectæ DK, demittatur super ea perpendicularis EL; & ob æquales EL, DC, erunt etiam æquales duæ EK, DF. Unde quadrata duo ED, DF, sive etiam duplum rectanguli EDF, & EF quadra-

dratum æqualia erunt DK quadrato. Sed duplum rectanguli EDF est æquale duplo rectanguli CDK; quum sit, ut DE ad DK, ita DC ad DF. Quare erit quoque duplum rectanguli CDK una cum EF quadrato æquale quadrato, quod fit ex DK.

246. Atque hinc modo facile erit, æquationem invenire, quæ exhibeat valorem rectæ DK. Ponatur etenim DC $= a$, EF $= c$, & DK $= x$. Revocata ergo ad terminos algebraicos ea æqualitate, fiet $2ax + c^2 = x^2$, sive $x^2 - 2ax = c^2$. Unde, addito utrinque a^2, & extracta hinc inde quadrata radice; habebitur $x - a = \sqrt{(c^2 + a^2)}$, & $x = a + \sqrt{(c^2 + a^2)}$.

247. Quæri etiam potest, pro resolutione problematis valor rectæ CK: quo casu invenietur quidem æquatio duarum dimensionum, sed quæ secundo termino caret. Nam, manentibus adhuc DC $= a$, & EF $= c$, si ponatur CK $= x$; fiet DK $= c + x$; atque adeo æquatio erit $2a^2 + 2ax + c^2 = a^2 + 2ax + x^2$, hoc est $x^2 = c^2 + a^2$, ex qua eruitur $x = \sqrt{(c^2 + a^2)}$. Et sa-
*art. 246. ne, quum valor totius DK sit * $a + \sqrt{(c^2 + a^2)}$; dempta DC $= a$, fiet CK $= \sqrt{(c^2 + a^2)}$.

IV. Problematum geometricorum exemplum quartum.

FIG. 17. 248. Centris A, & B descripti sint duo circuli, sese intus contingentes in D. Utrumq; autem contingat in punctis F, & G tertius circulus, descriptus centro C. Et, data ratione, quam habet radius tertii hujus circuli CF ad perpendicularem CE, demissam super AB; opor-

oporteat, determinare, tum ipsius radii longitudinem, cum positionem centri C.

249. Plane, sicuti recta AB, producta, transire debet per D; ita quoque, si jungantur rectae AC, BC; prior transibit per punctum F, & secunda per punctum G. Ponatur ergo AD, vel AF $= a$; BD, vel BG $= b$; & CF, vel CG $= x$. Jamque fiet AB $= a - b$, AC $= a - x$, & BC $= b + x$. Sit quoque ratio radii CF ad perpendicularem CE aequalis ei, quam habet p ad m. Et, faciendo, ut p ad m, ita x ad quartam proportionalem, invenietur CE $= mx : p$.

250. Ponatur insuper AE $= y$, ita, ut fiat BE $= a - b + y$. Et quoniam triangulum AEC rectum habet angulum in E; erit quadratum ex AC aequale duobus quadratis AE, CE. Quare, translata ad terminos algebraicos aequalitate ista, habebitur aequatio $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + m^2x^2 : p^2$. Et similiter, quia triangulum BEC rectum habet angulum in E; erit quadratum ex BC aequale duobus quadratis BE, CE. Unde, revocata hac alia aequalitate etiam ad algebraicos terminos, fiet aequatio altera $b^2 + 2bx + x^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ay - 2by + y^2 + m^2x^2 : p^2$ sive etiam $2bx + x^2 = a^2 - 2ab + 2ay - 2by + y^2 + m^2x^2 : p^2$.

251. Pro duabus igitur incognitis, quae in problemate occurrunt, habemus duas aequationes, quarum altera est $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + m^2x^2 : p^2$, altera $2bx + x^2 = a^2 - 2ab + 2ay - 2by + y^2 + m^2x^2 : p^2$. Modo oportet, ex iis eruere tertiam aequationem, quae omnes problematis conditiones includens, unicam dumtaxat incognitam comprehendat. Plane vero, facien-

cien-

ciendo, ut maneat in æquatione incognita x, quæ designat quæsitam radii longitudinem, præstabimus id in hunc modum.

252. Jam ex prima æquatione habetur $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + m^2x^2 : p^2$. Sed secunda æquatio $2bx + x^2 = a^2 - 2ab + 2ay - 2by + y^2 + m^2x^2 : p^2$, transponendo, exhibet $2bx + x^2 - a^2 + 2ab - 2ay + 2by = y^2 + m^2x^2 : p^2$. Quare erit $a^2 - 2ax + x^2 = 2bx + x^2 - a^2 + 2ab - 2ay + 2by$, hoc est $2ay - 2by = 2bx + 2ax - 2a^2 + 2ab$; & consequenter erit $y = (bx + ax - a^2 + ab) : (a - b)$, & $y^2 = (bx + ax - a^2 + ab)^2 : (a - b)^2$. Erat autem in prima æquatione $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 + m^2x^2 : p^2$. Itaque per substitutionem fiet $a^2 - 2ax + x^2 = (bx + ax - a^2 + ab)^2 : (a - b)^2 + m^2x^2 : p^2$.

253. Ut forma hujus æquationis concinnior evadat, præstat prius advertere, quod, sicuti ratio radii CF ad perpendicularem CE posita est æqualis ei, quam habet m ad p; ita nihil vetat, supponere consequentem $p = a - b$, & antecedenti m largiri talem valorem, ut liceat, exprimere eandem illam rationem per eam, quam habet m ad $a - b$. Plane vero in hac hypothesi inventa æquatio abibit in hanc aliam $a^2 - 2ax + x^2 = (bx + ax - a^2 + ab)^2 : (a - b)^2 + m^2x^2 : (a - b)^2$, quæ sicuti, multiplicatis terminis omnibus per $(a - b)^2$, reducitur ad $4a^2b - 4abx = 4ab^2 + m^2x$, ita dabit $x = (4a^2b - 4ab^2) : (4ab + m^2)$.

254. Invento valore radii CF, positionem centri C nullo negotio determinare licebit. Jam enim, ob datam rationem ejus radii ad perpendicularem CE, notus fit etiam hujus perpendicula-

laris valor. Unde eo res redit, ut ipsius AE valor cognitus fiat. Plane vero, quum sit AE $= y$; ad indagandum ejus valorem, non aliud fieri debet, quam in æquatione paulo ante * inventa $y = (bx + ax - a^2 + ab) : (a - b)$ subrogare loco x valorem suum $(4a^2b - 4ab^2) : (4ab + m^2)$. Sic enim habebitur $y = (4ab^2 - am^2) : (4ab + m^2)$. *art. 252.

255. Cæterum, quum sit $y = (bx + ax - a^2 + ab) : (a - b)$, erit $a + y = a + (bx + ax - a^2 + ab) : (a + b) = (bx + ax) : (a - b)$; proindeque, æqualitate ista ad proportionem revocata, fiet, ut $a - b$ ad $a + b$, ita x ad $a + y$: hoc est, ut differentia ipsarum AD, BD ad summam earundem, ita radius CF ad ipsam DE. Habet ergo radius CF ad correspondentem portionem DE datam rationem. Unde si centro H describatur circulus alter, contingens in K, & M eosdem illos, qui descripti sunt centris A, & B, demittaturq; super AB perpendicularis HL; erit in data illa ratione, tum CF ad DE, cum HK ad DL.

V. *Problematum geometricorum exemplum quintum.*

256. Iisdem positis, detur modo magnitudine, & positione tertius circulus, descriptus centro C, & eorum unumquemque contingat in punctis K, M, N quartus circulus descriptus centro H. Oportet definire, tum longitudinem radii ejus HN, cum rationem, quam idem radius habet ad perpendicularem HL, demissam super AB. FIG. 17.

257. Jungatur CH, & producatur usque do-

donec conveniat cum perpendiculari DO in O.
Part.255. Quia ergo * datam habet rationem, tum CN ad DE, cum HN ad DL; erit ut CN ad HN, ita DE ad DL. Sed DE est ad DL, ut CO ad HO. Itaque erit ex æquali, ut CN ad HN, ita CO ad HO; & convertendo, ut CN ad differentiam ipsarum CN, HN, ita CO ad CH, seu summam earundem CN, HN: & propterea, si ponatur CN $= c$, & HN $= x$; fiet CO $= (c^2 + cx):(c - x)$, atque adeo NO $= 2cx:(c - x)$.

258. Agatur deinde radius HP, æquidistans ipsi CG. Et quoniam CO est ad HO, ut CN ad HN, sive, ut CG ad HP; recta OG transibit per punctum P. Quumq; æquales sint anguli GBM, MHP, & BG sit ad BM, ut HP ad HM; eadem recta transibit quoque per punctum M. Unde, quum CO sit ad HO, ut GO ad PO, & GO sit ad PO, veluti est rectangulum GOM ad rectangulum POM; erit quoque, ut CO ad HO, ita rectangulum GOM ad rectangulum POM.

259. Jam CO erat ad HO, ut CN ad HN, sive HQ. Quare, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit quoque, ut CO ad HO, ita NO ad QO, sive etiam ita NO quadratum ad rectangulum NOQ: & propterea rursus ex æquali erit, ut NO quadratum ad rectangulum NOQ, ita rectangulum GOM ad rectangulum POM. Unde, sicuti rectangula duo NOQ, POM sunt æqualia inter se; ita erit NO quadratum æquale rectangulo GOM.

260. Quum autem eidem rectangulo GOM æquale sit etiam quadratum ex DO, erunt quadrata duo DO, NO æqualia inter se; adeoque, quum fiat DO ipsi NO æqualis, erit DO $= 2cx:$

(c —

$(c - x)$. Quare, si ponatur CE $= d$, & HL $= y$, ducanturque ipsi AB parallelæ CR, HS; fiet OR $= (2cx - cd + dx) : (c - x)$, & OS $= (2cx - cy + xy) : (c - x)$; atque adeo erit, ut OR ad OS, ita $2cx - cd + dx$ ad $2cx + cy + xy$.

261. Plane vero OR est ad OS, ut CO ad HO, sive etiam *, ut CN ad HN. Quare erit in terminis algebraicis, ut c ad x, ita $2cx - cd + dx$ ad $2cx - cy + xy$: & propterea, multiplicatis extremis, ac mediis, fiet $2cx^2 - cdx + dx^2 = 2c^2x - c^2y + cxy$ sive $2cx^2 - cdx + dx^2 - 2c^2x = cxy - c^2y$, quæ æqualitas, rursus in terminos proportionales resoluta, dabit, ut x ad y, ita $cx - c^2$ ad $2cx - cd + dx - 2c^2$. Sed $cx - c^2$ est ad $2cx - cd + dx - 2c^2$, ut c ad $2c + d$. Itaque erit, ut x ad y, ita c ad $2c + d$. *art. 257.

262. Inventa est ergo relatio, quam habet radius HN ad perpendicularem HL, estque illa eadem, quam habet radius CN ad perpendicularem CE, auctam duplo ipsius CN. Unde modo facile erit, ex problemate præcedente, definire longitudinem ipsius radii HN. Nam, manentibus, ut antea *, AD $= a$, & BD $= b$, si fiat ut c ad $2c + d$, ita $a - b$ ad quartam proportionalem, quæ vocetur m; habebitur * HN $= (4a^2b - 4ab^2) : (4ab + m^2)$. *art. 249. *art. 253.

263. Quod, si determinanda esset positio ipsius circuli, id factu facile erit. Extendatur enim CE usque in T, ita, ut sit ET æqualis ipsi CN; & abscindatur ex ET portio EV $= (4a^2b - 4ab^2 : (4ab + m^2)$. Jamque, si per punctum V ducatur recta UX, ipsi AB parallela, conve-

niens cum DT in X; & , ducta XH , ipsi TC æquidistante, fiat, ut XL ad LH, ita $a - b$ ad m; circulus, qui describitur centro H, & intervallo XL, erit ille, quem quærimus.

264. Notatu hoc loco dignum existimo, quod si quartus hic circulus collocandus esset ad partem contrariam; tunc ratio radii HN ad perpendicularem HL prodiret æqualis ei, quam habet c ad $d - 2c$. Id vero, vel exinde liquere potest, quod, quum in ea, quam habet, positione, x sit ad y, ut c ad $2c + d$, omnino necesse est, ut, subductis duplis antecedentium ex consequentibus, x sit ad $y - 2x$, ut c ad d.

CAPUT V.

Exempla analysis Recentiorum ex mixta Mathesi deducta.

265. Reliquum jam est, ut Recentiorum analysim exemplis, ex mixta Mathesi desumptis, illustremus. Vocatur autem mixta Mathesis, quæ quantitatem considerat, non in abstracto, sed cum aliqua sensibili affectione materiæ conjunctam, ac copulatam; eademque in varias partes dispescitur, pro varietate affectionum sensibilium, quæ una cum quantitate possunt considerari.

266. Jam in resolutione problematum, quæ mixtam Mathesim respiciunt, perspecta nobis esse debent, non modo theoremata ipsius abstractæ quantitatis, verum etiam accidentia ejus sensibilis materiæ affectionis, de qua est quæstio.

Ne-

Neque enim quidquam de re aliqua poteſt indagari, niſi ejus rei, quod proprium eſt, nobis innoteſcat, idque ipſum in illius inventione ad calculum revocetur.

267. Nec ad rem facit, quod ultimæ rerum ſenſibilium differentiæ perſæpe nos latent. Nam explorata nobis eſſe poſſunt, ſive ratione, ſive experimentis, talia earum rerum ſymptomata, quæ ultimas earundem differentias includant, licet eas nobis non aperiant. Plane vero, ubi ejuſmodi illarum rerum ſymptomata adhibentur, perinde erit, ac ſi ultimæ ipſarum differentiæ calculo ſubjiciantur.

I. *Problematum mixtæ Matheſis exemplum primum.*

268. PRimum igitur exemplum problematum mixtæ Matheſis ſit illud, in quo oportet definire leges motuum, quæ locum habent in occurſu corporum inertium. Vocantur autem corpora inertia, quæ vi elaſtica ſunt prorſus deſtituta, ſive quia ſunt perfecte mollia, ſive viciſſim, quia perfecta duritie ſunt prædita; cujuſmodi fortaſſis nulla extant in rerum natura.

269. Jam principia phyſica, ex quibus leges iſtæ dependent, hæc ſunt. Primum, quod quantitas motus cujuſque mobilis definitur per productum ex pondere, ſeu quantitate materiæ in ſuam velocitatem. Deinde, quod velocitas eſt affectio motus, per quam mobile datum ſpatium in dato tempore percurrit; atque adeo, quod menſura ejus eſt relatio, quam habet ſpatium ad

tempus. Et denique, quod actio, & reactio sunt semper æquales, & contrariæ; hoc est, quod in omni actione corporea, quantum unum corpus agit in alium, tantundem resistentiæ patitur ab isto.

270. His positis principiis, quæ ulteriore explicatione non egent, colligitur primo, quantitatem motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutari ab actione corporum inter se. Nam, quum, ob tertium principium *, actio, & reactio sint semper æquales, & contrariæ; æquales item mutationes efficient in motibus versus contrarias partes. Itaque, si motus fiant ad eandem partem, quidquid additur motui corporis fugientis, subducetur ex motu corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem, quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque: & propterea differentia motuum, factorum ad contrarias partes, adhuc manebit eadem.

* Art. 269.

271. Colligitur secundo, eandem motus quantitatem, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias; æqualem esse ei, quæ oriretur, si utrumque corpus moveretur velocitate communis centri gravitatis, sive ejus puncti, quod dividit distantiam corporum in reciproca ipsorum ratione. Sint etenim
FIG. 18. in A, & B corpora duo, quorum pondera, seu
19. quantitates materiæ vocentur P, & p, sitque C ipsorum commune gravitatis centrum, seu punctum illud, quod dividit distantiam corporum

AB

AB in reciproca ratione suorum ponderum. Moveantur primum ad eandem partem, & pergant eodem tempore ad puncta a, & b, in qua positione sit c commune centrum gravitatis eorundem corporum. FIG. 18.

272. Ponatur $AB = d$, $Aa = V$, & $Bb = u$. Fiet ergo $ab = d + u - V$. Quia vero punctum C dividit distantiam AB in reciproca ratione ponderum P, & p; erit ut P ad p, ita BC ad AC; & componendo, ut $P + p$ ad p, ita AB ad AC. Unde, quum sit $AB = d$, fiet $AC = pd : (P + p)$. Eadem ratione, quia punctum c dividit distantiam ab in reciproca ratione ponderum P, & p; erit, ut P ad p, ita bc ad ac; & componendo, ut $P + p$ ad p, ita ab ad ac. Quare, quum sit $ab = d + u - V$, fiet $ac = (pd + pu - pV) : (P + p)$: proindeque, sicuti reperitur $Ac = (pd + pu + PV) : (P + p)$, ita orietur $Cc = (pu + PV) : (P + p)$.

273. Jam longitudines Aa, Bb, Cc, velut descriptæ eodem tempore a punctis A, B, C, designare nobis possunt velocitates eorum punctorum. Unde, quum V sit velocitas corporis A, u velocitas corporis B, & $(PV + pu) : (P + p)$ velocitas communis centri gravitatis C; fiet PV proprius motus corporis A, pu proprius motus corporis B, & $PV + pu$ motus, qui oritur, si utrumque corpus moveretur velocitate communis centri gravitatis C. Est autem summa ex propriis iis motibus æqualis huic tertio motui. Quare summa motuum, factorum ad eandem partem, æqualis erit ei, qui producitur, faciendo, ut utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveatur.

274. Quod si vero corpora sibi mutuo obvium eant, & in eorum accessu centrum feratur
FIG. 19. versus B; tunc, iisdem positis, invenietur $Cc = (PV - pu):(P + p)$. Unde, quum V sit velocitas corporis A, u velocitas corporis B, & $(PV - pu):(P + p)$ velocitas communis centri gravitatis C: fiet quidem PV proprius motus corporis A, & pu proprius motus corporis B; sed erit $PV - pu$ motus, qui oritur, si utrumque corpus moveretur velocitate communis centri gravitatis. Est autem differentia illorum motuum æqualis huic tertio motui. Quare differentia motuum, factorum ad contrarias partes, æqualis erit ei, qui producitur, faciendo, ut utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveatur.

275. Atque hinc sequitur tertio, velocitatem communis centri gravitatis duorum corporum, in eadem recta latorum, non mutari ab actione corporum inter se. Nam quantitas motus, quæ producitur, capiendo summam motuum, factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, per mutuam cor-
*art.270. porum actionem non mutatur *. Sed huic motus
*art.271. quantitati æqualis est * illa, quæ oritur, faciendo, ut utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveatur. Itaque hæc alia motus quantitas eadem quoque semper perseverat: quod profecto fieri non potest, nisi velocitas communis centri gravitatis post actionem corporum maneat eadem, ac immutata.

276. Ex quibus modo facile erit, definire leges motuum, quæ locum habere debent in congressu corporum inertium. Plane enim cor-

pora

pora inertia, utpote vi elastica * destituta, post occursum una cum communi gravitatis centro junctim movebuntur. Quare corpora illa non aliam velocitatem post occursum habebunt, quam eandem illam, qua fertur eorum commune centrum gravitatis. Sed ex ostensis * velocitas communis centri gravitatis duorum corporum, in eadem recta latorum, non mutatur ab actione corporum inter se. Itaque corpora inertia post occursum movebuntur eadem velocitate, qua ante occursum ipsorum commune gravitatis centrum ferebatur. *art. 268. *art. 275.

277. Hinc, retenta eadem denominatione, paulo ante usurpata, nimirum, quod P, & p sint pondera, seu quantitates materiæ corporum congredientium, quodque V, & u sint velocitates eorundem corporum; velocitas communis centri gravitatis erit $(PV + pu) : (P + p)$, quum corpora moventur ad eandem partem *, & $(PV - pu) : (P + p)$, quum corpora sibi mutuo obviam eunt, & PV major est, quam pu *. Unde motus corporum post occursum erunt $(P^2V + Ppu) : (P + p)$, & $(pPV + p^2u) : (P + p)$ in primo casu; erunt vero $(P^2V - Ppu) : (P + p)$, & $(pPV - p^2u) : (P + p)$ in secundo. Sed si velocitas, designata per u, sit nulla, ita, ut quiescat corpus, ad quod illa refertur; tunc, sicuti $PV : (P + p)$ est velocitas communis centri gravitatis, ita erunt $P^2V : (P + p)$, & $pPV : (P + p)$ motus corporum post occursum. *art. 273. *art. 274.

278. Itaque, si pondus primi corporis fuerit duarum librarum, & pondus secundi unius tantum libræ, sitque præterea velocitas primi graduum septem, & velocitas secundi gradus unius;

erit $P = 2$, $p = 1$, $V = 7$, & $u = 1$: proindeque, ſi corpora moveantur ad eandem partem, poſt occurſum primum quidem habebit decem gradus motus, ſecundum vero gradus quinque. Quod ſi, manentibus $P = 2$, & $p = 1$, ponatur $V = 6$, & $u = 0$, ita, ut ſecundum corpus quieſçat, & primum feratur verſus ipſum duodecim gradibus motus; tunc poſt occurſum primum habebit octo gradus motus, & ſecundum gradus quatuor. Denique, ſi manentibus ſemper $P = 2$, & $p = 1$, ponatur $V = 7$, & $u = 2$, eantque ſibi mutuo obviam corpora; tunc ſimiliter poſt occurſum primum habebit octo gradus motus, & ſecundum gradus quatuor.

II. Problematum mixtæ Matheſis exemplum ſecundum.

279. SEcundum exemplum problematum mixtæ Matheſis ſuppeditent nobis leges motuum, quæ locum habere debent in congreſſu corporum elaſticorum. Ad eas autem determinandas, aſſumemus, corpora congredientia eſſe perfecte elaſtica, hoc eſt, ſeſe reſtituere in priſtinum ſtatum eadem plane vi, qua ipſa comprimuntur. Ac primo quidem inquirendum, quid addat corporibus congredientibus hæc vis elaſtica, & quem pariat effectum in ipſo corporum congreſſu.

280. Nimirum, quemadmodum corpora inertia poſt occurſum debent eadem velocitate junctim moveri cum communi gravitatis centro, quia nulla datur cauſa, per quam a ſe mutuo debeant ſeparari; ita præcipuus elaſticitatis ef-

effectus est, ut corpora congredientia a se invicem resiliant, statim ac compressa in pristinam figuram se restituunt. Et quoniam actio, & reactio sunt semper æquales, & contrariæ; illa eadem vis elastica æqualiter aget in utrumque corpus: proindeque ipsa corpora, ratione elasticitatis, æqualibus viribus, seu motibus a se mutuo resilient.

281. Exinde autem, quod corpora elastica post occursum, ratione elateris, æqualibus motibus a se invicem resiliant, facile erit, leges congressuum pro corporibus elasticis una similiter regula definire. Quum enim corpora supponantur perfecte elastica *; restituent sese in pristinam figuram eadem velocitate, qua agente comprimuntur. Unde, quum a se invicem debeant æqualibus motibus resilire; dividenda erit ipsis hæc velocitas in reciproca suorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congressuum pro corporibus elasticis, si præter illam velocitatem, qua junctim moverentur post occursum, si forent inertia, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elasticitatis a se mutuo reflectuntur. *art. 279.

282. Nimirum primo, si corpora duo, quorum pondera sint P, & p, ita quidem moveantur ad eandem partem velocitatibus V, & u, ut primum sit corpus insequens, secundum corpus fugiens; erit $V - u$ velocitas, qua corpora illa accedunt ad se mutuo, & sese invicem comprimunt. Unde, partita iis velocitate ista in reciproca suorum ponderum ratione; erunt $(pV - pu) : (P + p)$, & $(PV - Pu) : (P + p)$ velocitates, quibus a se mutuo resiliunt. Jam vero eadem corpora, si con-

* Art. 277. si considerentur velut inertia, debent * junctim moveri versus plagam, ad quam fit motus, velocitate $(PV + pu) : (P + p)$. Itaque, si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus insequens, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus fugiens, erit $(PV - pV + 2pu) : (P + p)$ velocitas corporis insequentis, & $(2PV + pu - Pu) : (P + p)$ velocitas corpis fugientis. Unde post occursum motus illius erit $(P^2V - PpV + 2Ppu) : (P + p)$, & motus istius $(2pPV + p^2u - pPu) : (P + p)$.

283. Secundo, si eadem corpora ita sibi mutuo obviam eant iisdem velocitatibus, ut primum majorem habeat motus quantitatem, quam secundum; tunc velocitas, qua accedunt ad se mutuo, & sese invicem comprimunt, erit $V + u$; proindeque, partita iis velocitate ista in reciproca suorum ponderum ratione; erunt $(pV + pu) : (P + p)$, & $(PV + Pu) : (P + p)$ velocitates, quibus a se mutuo resiliunt. Jam vero eadem corpora, si considerentur velut inertia, debent * junctim moveri versus plagam, ad quam reflectitur secundum corpus, velocitate $(PV - pu) : (P + p)$. Quare, si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus primum, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus alterum; erit $(PV - pV - 2pu) : (P + p$ velocitas corporis primi, & $(2PV + Pu - pu) : (P + p)$ velocitas corporis secundi. Unde motus illius erit $(P^2V - PpV - 2Ppu) : (P + p)$, motus vero istius $(2pPV + pPu - p^2u) : (P + p)$.

* Art. 277.

284. Et denique, si velocitas secundi cor-

po-

poris *a* statuatur nulla, adeo nempe, ut quiescat secundum corpus, & dumtaxat primum moveatur versum ipsum velocitate V; eo casu erit V velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuo, & sese invicem comprimunt; adeoque, partita ipsis hac velocitate in reciproca suorum ponderum ratione, erunt $pV:(P+p)$, & $PV:(P+p)$ velocitates, quibus a se mutuo resiliunt. Jam vero, si eadem corpora considerentur velut inertia, debent * junctim moveri versus plagam, ad quam reflectitur corpus quiescens, velocitate $PV:(P+p)$. Itaque, si ex hac velocitate subducatur velocitas, qua reflectitur corpus mobile, & eidem addatur velocitas, qua resilit corpus quiescens; erit $(PV-pV):(P+p)$ velocitas primi, & $2PV:(P+p)$ velocitas secundi. Unde etiam motus istius erit $2pPV:(P+p)$, & motus illius $(P^2V-PpV):(P+p)$. * art. 277.

285. Has leges generales exemplis illustrare, superfluum existimamus. Tantum notabimus, in singulis casibus secundum corpus post occursum moveri semper versus eam plagam, ad quam fieret motus ejus, si utique velut iners consideretur; sed non item corpus primum, ut quod, modo versus illam, modo versus plagam contrariam moveri, & interdum etiam quiescens, ac immotum manere potest. Si enim velocitas, qua reflectitur ratione elateris, minor sit velocitate, qua movetur ratione inertiae; non mutabitur ejus directio, sed perget adhuc moveri versus eandem plagam. Quod si vero fuerit major; mutabitur directio ejus, & tendet ad partem contrariam. Ac denique si eidem fuerit aequalis; tunc ad neutram partem tendet, sed ma-

pe-

nebit quiescens, ac immotum. Patet autem, quod, sicuti hoc postremum contingit, quum motus ejus evanescit; ita accidit primum, quum motus ejus est positivus; & evenit secundum, ubi idem motus prodit negativus.

286. Notabimus quoque, quod ubi pondera corporum congredientium fuerint æqualia, hoc est $P = p$; tunc leges suorum motum multo quidem simpliciores evadunt. Nam in primo casu tendent ad eandem plagam, velocitatibus permutatis. In secundo casu fiet quidem velocitatum permutatio, sed movebuntur ad plagas contrarias. Ac denique in tertio casu velocitatem corporis moti excipiet corpus quiescens, ipsumque corpus, quod antea movebatur, manebit immotum. Unde colligi potest, regulam, a Cartesio traditam, quod si corpus unum impingit in alterum quiescens, & æquale, ei omnem suam velocitatem communicat, ipso in quiete permanente, tantum in corporibus perfecte elasticis sibi locum vindicare.

III. Problematum mixtæ Mathesis exemplum tertium.

287. Tertium exemplum problematum mixtæ Mathesis ex ludo trudiculari deducere lubet. Jam enim notum est, in ludo isto subinde a lusore trudendam esse pilam suam, ut incurrat semper in pilam alterius lusoris; & quandoque non directe unam pilam versus alteram trudi, sed adeo oblique, ut reflexa semel, aut pluries super lateribus ludi trudicularis, in alteram incurrat. Itaque oporteat, pilam,

lam, positione datam, subinde trudere, ut super ludi lateribus aliquoties reflexa, aliam, similiter positione datam, offendat.

288. Plane, quemadmodum in ludo trudiculari pilæ adhibentur eburneæ, atque adeo perfecte elasticæ; ita in hujus problematis resolutione illud ex physicis assumendum est, reflexionem pilæ super unoquoque latere ludi ea lege fieri, ut angulus reflexionis sit æqualis angulo incidentiæ. Neque enim hæc lex obtinet in quorumcumque corporum reflexione. Nam, sicuti causa reflexionis est elasticitas, nec corpora inertia reflexionem ullam patiuntur; ita generaliter lex reflexionis hæc esse debet, ut sinus anguli incidentiæ sit ad sinum anguli reflexionis, veluti est vis, qua corpus comprimitur, ad vim, qua idem corpus in pristinum statum se restituit.

289. Repræsentet ergo rectangulum ABCD ludum trudicularem, in quo dentur positione pilæ duæ M, & N. Et oporteat primum, pilam M subinde trudere, ut reflexa semel super latere AB, offendat pilam alteram N. Ponatur jam factum; sitque ME linea, per quam pila trudenda est, & EN linea, per quam eadem reflexa, impingit in pilam alteram N. Demittantur super latere AB perpendicula MO, NP. Et quoniam pilæ M, & N dantur positione; dabuntur quoque perpendicula ista. Unde, quum dentur puncta O, & P; dabitur etiam distantia eorum punctorum OP. FIG. 20.

290. Ponatur itaque $MO = a$, $NP = b$, $OP = c$, & $OE = x$. Erit ergo $PE = c - x$. Et quoniam, ratione reflexionis, æquales sunt anguli MEO, NEP; triangula duo rectangula

EOM,

EOM, EPN similia erunt inter se. Unde erit, ut MO ad NP, ita OE ad PE; hoc est in terminis algebraicis, ut a ad b, ita x ad $c - x$: proindeq;erit $bx = ac - ax$, sive etiam $ax + bx = ac$; & consequenter $x = ac : (a + b)$. Quum autem ex hac æquatione deducatur, ut $a + b$ ad a, ita c ad x; liquet, punctum reflexionis E inveniri, si producta OM versus Q, usque donec fuerit MQ æqualis NP, ducatur ME parallela ipsi PQ.

FIG. 21. 291. Oporteat secundo, pilam M subinde trudere, ut post binas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, impingat demum in pilam alteram N. Id, quod quæritur, ponatur similiter jam factum; sitque ME linea, per quam pila trudenda est; EF linea, per quam reflexa a latere AB, incidit in latus BC; ac demum FN linea, per quam reflexa a latere BC, impingit in pilam alteram N. Demittantur super lateribus AB, BC perpendiculares MO, NP; & ponatur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BP = d$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$.

292. Et quoniam, ratione reflexionis, æquales sunt anguli MEO, FEB; triangula duo rectangula EOM, EBF similia erunt inter se. Unde, quum sit, ut OE ad BE, ita MO ad BF; invenietur $BF = (ac - ax) : x$, atque adeo $PF = (dx - ac + ax) : x$. Similiter, quia, ob reflexionem, æquales sunt anguli EFB, NFP; triangula duo rectangula EBF, NPF erunt inter se similia. Quare erit, ut BE ad NP, ita BF ad PF; hoc est in terminis algebraicis, ut $c - x$ ad b, ita $(ac - ax) : x$ ad $(dx - ac + ax) : x$, sive etiam, multiplicatis omnibus analogiæ termi-

minis per x, ut $cx - x^2$ ad bx ita $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$.

293. Quia ergo $cx - x^2$ est ad bx, ut $ac - ax$ ad $dx - ac + ax$; erit, permutando, ut $cx - x^2$ ad $ac - ax$, ita bx ad $dx - ac + ax$. Sed $cx - x^2$ est ad $ac - ax$, ut x ad a. Quare, erit ex æquali, ut x ad a, ita bx ad $dx - ac + ax$: proindeque erit $abx = dx^2 - acx + ax^2$, hoc est $ab = dx - ac + ax$, sive etiam $ab + ac = dx + ax$; atque adeo erit $x = (ab + ac) : (a + d)$. Quum autem ex hac æquatione deducatur, ut $a + d$ ad $b + c$, ita a ad x; liquet, primum reflexionis punctum E inveniri, si productis OM, OB versus Q, & R, usque donec fiat MQ æqualis BP, & BR æqualis NP, ducatur ME parallela ipsi QR.

294. Oporteat demum, pilam M subinde trudere, ut post ternas reflexiones, unam super latere AB, alteram super latere BC, & tertiam super latere CD, impingat tandem in pilam alteram N. Ponatur quoque jam factum; sitque ME linea, per quam pila trudenda est; EF linea, per quam reflectitur a latere AB, & incidit in latus BC; FG linea, per quam reflectitur a latere BC, & incidit in latus CD; ac denique GN linea, per quam reflexa a latere CD, impingit in pilam alteram N. Demittantur super lateribus AB, CD perpendiculares MO, NP, & ponatur $MO = a$, $NP = b$, $BO = c$, $BC = d$, $CP = e$, & $OE = x$. Erit itaque $BE = c - x$. FIG. 22.

295. Et quoniam, ratione reflexionis, æquales sunt anguli MEO, FEB; triangula duo rectangula MOE, FBE similia erunt inter se. Unde, quum sit, ut OE ad MO, ita BE ad

BF;

BF; invenietur BF $= (ac - ax) : x$, atque adeo CF $= (dx - ac + ax) : x$. Similiter, quia propter reflexionem, æquales sunt anguli BFE, CFG; triangula duo rectangula FBE, FCG erunt inter se similia. Quare, quum sit, ut BF ad BE, sive, ut MO ad OE, ita CF ad CG; invenietur CG $= (dx - ac + ax) : a$, atque adeo PG $= (ae - dx + ac - ax) : a$.

296. Eadem quoque ratione, quia, ob reflexionem, æquales sunt anguli CGF, PGN; similia erunt inter se triangula duo rectangula FCG, NPG. Unde, quum sit, ut CF ad CG, hoc est, ut BF ad BE, sive etiam, ut MO ad OE, ita NP ad PG; erit, in terminis algebraicis, ut ut a ad x, ita b ad $(ae - dx + ac - ax) : a$: proindeque, quum fiat $bx = ae - dx + ac - ax$, erit $x = (ae + ac) : (a + b + d)$. Plane vero, quia ex ista æquatione deducitur, ut $a + b + d$ ad $e + c$, ita a ad x; liquet, primum reflexionis punctum E inveniri, si productis OM, OB versus Q, & R, donec fuerit MQ æqualis ipsis BC, NP simul sumptis, & BR æqualis CP, ducatur ME parallela ipsi QR.

IV. Problematum mixtæ Mathesis exemplum quartum.

297. PRæcedenti problemate partem minimam ludi trudicularis exhibuimus. Neque enim de hoc tantum agitur in hoc ludo, ut quisque lusor subinde trudat pilam suam, ut offendat pilam alterius; sed curandum est quoque, ut alterius hujus pila subinde postea moveatur, ut pergat ad aliquod ex fo-

foraminibus, insculptis prope latera ludi. Itaque pro quarto exemplo problematum mixtæ Mathesis invenienda sit nobis linea, per quam pila, positione data, trudi debet, ut altera, similiter positione data, ab ea percussa, pergat ad datum locum.

298. Pro hujus problematis resolutione illud ex Physicis supponi debet, quod, sicuti motus æquabilis ejusdem corporis per duo latera alicujus parallelogrammi componunt simul motum per ejus diagonalem, itidem æquabilem; ita vicissim æquabilis motus cujusque corporis, qui per datam lineam peragitur, resolvi potest in duos alios motus, pariter æquabiles, seorsim peragendos per duo latera parallelogrammi, cujus linea illa sit diagonalis. Et quia circa eandem lineam, velut diagonalem, infinita possunt parallelogramma describi; infinitis quoque modis ea motus resolutio perfici poterit.

299. Hoc supposito, referat rursus rectangulum ABCD ludum trudicularem; & dentur in eo positione duæ pilæ, quarum centra sint M, & N. Oportet, pilam unam M subinde trudere, ut post occursum ejus in pilam alteram N, pergat ista ad datum locum C. Jungatur CN. Jamque, si recta ista producta transit per M; liquet, pilam M trudendam esse per ipsam MC. Quod si vero recta CN non transeat producta per M; sit E punctum in superficie pilæ N, per quod transit producta recta CN. Et siquidem pila M subinde trudi possit, ut alteri N occurrat in E; omnino necesse est, ut ista post occursum pergat ad datum locum C. FIG. 13.

300. Exponat etenim recta GF, tum mo-

tum, cum directionem pilæ M, ubi alteri N occurrit in E. Jamque, si ipsi CE perpendicularis
*art.298. demittatur GH; resolvi poterit * motus GF in duos alios GH, HF. Sed horum priore GH pila M nequaquam percutitur; cum ejus directio parallela sit rectæ, quæ pilam N tangit in E. Itaque percussio fiet tantummodo motu altero HF, cujus directio illi eidem rectæ perpendicularis est. Unde, quum recta HF producta tendat ad C; etiam pila N post percussionem perget ad eundem locum C.

301. Res igitur eo redit, ut inquiramus, quomodo pila M trudenda sit, ut alteri N occurrat in E. Hunc in finem super CE producta capiatur EF æqualis semidiametro pilæ M. Et siquidem recta MF contineat cum EF angulum obtusum; liquet, pilam M trudi posse per rectam MF. Quod si vero angulus EFM non sit obtusus; tunc non aliter, quam per reflexionem, factam super uno laterum AB, AD, pila M trudenda erit. Eligatur ergo latus AD, sitque MGF iter reflexum pilæ M.

302. Et quoniam pilæ M, & N sunt magnitudine datæ, estque etiam positione data recta CN; dabitur positione punctum F. Unde, demissis super AD perpendiculis MO, FK; dabitur pariter, tum utrumque horum perpendiculorum, cum lateris intercepta portio OK. Ponatur itaque MO $= a$, FK $= b$, OK $= c$, & OG $= x$. Jamque fiet KG $= c - x$. Sed, propter reflexionem, æquales sunt anguli MGO, FGK. Quare, quum similia sint inter se triangula duo rectangula MOG, FKG; erit, ut MO ad OG, ita FK ad KG; hoc est in terminis al-

ge-

gebraicis, ut a ad x, ita b ad $c - x$: proindeque erit $bx = ac - ax$, & $x = ac : (a + b)$.

303. Cæterum, etsi in ludo trudiculari quisque lusor subinde trudere debeat pilam suam, ut pila alterius, ab ea percussa, pergat ad aliquod ex foraminibus, insculptis prope latera ludi; curandum est tamen, ut ea, quæ truditur, pila foramen aliud non subeat; quia aliter ludus cedet ei, cujus pila percussa est. Unde, ne aliquid hic desit, quod ad hunc ludum pertineat; ad rem erit, definire lineam, per quam pila M prosequitur motum suum, postquam offenderit in E pilam alteram N.

304. Et quidem ex duobus motibus GH, HF, in quos resolvi potest motus GF ipsius pilæ M, jam vidimus supra *, priorem GH nihil ad percussionem conferre. Plane vero alter HF, sicuti totus influit in percussionem, ita post impactum ne quidem ex parte percutienti pilæ restituitur; quandoquidem pilæ in hoc ludo sunt æquales, & perfecte elasticæ, & in hujusmodi corporibus velocitas corporis moti tota excipitur a corpore quiescente *. Movebitur ergo pila M post impactum dumtaxat priore motu; & propterea, ducta FL, ipsi GH parallela, erit FL recta, per quam pila M motum suum prosequetur.

* art. 300.

* Art. 286.

V. Problematum mixtæ Mathesis exemplum quintum.

305. QUintum, & ultimum exemplum problematum mixtæ Mathesis desumemus ex Arte ballistica, proponendo no-

bis determinationem ejus lineæ, per quam globus data velocitate projici debet, ut in suo descensu obliquo pergat ad datum locum. Pro resolutione hujus problematis, præmittenda sunt theoremata duo, quæ primus omnium demonstravit Galilæus. Primum est, quod spatia, quæ grave corpus, e quiete cadens, describit, computata ad initio motus, sunt, ut quadrata temporum, quibus describuntur. Alterum est, quod spatium, descriptum ab eodem gravi, e quiete cadente, est dimidium ejus, quod velocitate ultimo acquisita æquabiliter eodem tempore describeretur.

FIG. 24. 306. Esto itaque globus A, quem oporteat subinde projicere velocitate, acquisita in descensu per altitudinem BA, ut cadendo pertingat ad datum locum M. Ponatur jam factum, sitque AC linea projectionis, & AEM curva, quam describit globus, ubi projectus pertingit ad datum locum M. Si ergo fiat AD æqualis AB, descendet globus vi gravitatis per AD eodem omnino tempore, quo descenderet per BA. Sed, completo circa curvam parallelogrammo ADEC, debet globus tempore illo describere motu projectili rectam AC, ut per motuum compositionem reperiri possit in E. Quare, per secundum theorema *, erit BA, vel AD semissis ipsius AC, sive DE.

* art. 305.

307. Porro circa eandem curvam compleatur parallelogrammum aliud ANMO. Et jam eodem tempore, quo globus describit vi gravitatis rectam AN, idem motu projectili describet rectam AO. Unde, quia spatia AC, AO, velut descripta motu projectili, hoc est eadem semper

velo-

velocitate, sunt, ut tempora descriptionum; & spatia AD, AN, veluti percursa vi gravitatis, sunt ex theoremate primo *, ut quadrata eorundem temporum: erit ex aequali, ut AD ad AN, ita AC quadratum ad AO quadratum, sive etiam, ita DE quadratum ad NM quadratum. Unde, impositis nominibus, tum notis, cum incognitis quantitatibus, facile erit, aequationem invenire, ad quam problema reducitur. *art.305.

308. Nimirum demisso super AD perpendiculo MQ, ponatur BA, sive AD $= a$, AQ $= b$, MQ $= c$, & AN $= x$. Erit ergo AC $= 2a$, & NQ $= x - b$ (sive etiam $b - x$). Et quoniam triangulum MQN rectum habet angulum in Q; erit NM quadratum aequale quadratis MQ, NQ. Unde, quia MQ quadratum est c^2, & quadratum ex NQ in omni casu est $x^2 - 2bx + b^2$; erit quadratum ex NM $= x^2 - 2bx + b^2 + c^2$. Ostensum est * autem, AD esse ad AN, ut est DE quadratum ad NM quadratum. Quare erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita $4a^2$ ad $x^2 - 2bx + b^2 + c^2$: & propterea quaesita aequatio erit $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$. *art.307.

309. Quum autem habeatur $x^2 - 2bx + b^2 + c^2 = 4ax$; addendo ad utramque partem $4a^2 - 4ax + 4ab - c^2$, fiet $x^2 - 2bx + b^2 - 4ax + 4ab + 4a^2 = 4a^2 + 4ab - c^2$: proindeque, extracta hinc inde radice quadrata, erit $x - b - 2a = \sqrt{(4a^2 + 4ab - c^2)}$, & $x = b + 2a + \sqrt{(4a^2 + 4ab - c^2)}$. Sed esse potest etiam $x = b + 2a - \sqrt{(4a^2 + 4ab - c^2)}$. Nam radix quadrata quantitatis $4a^2 + 4ab - c^2$, ut alibi * diximus, non minus est $-\sqrt{(4a^2 + 4ab - c^2)}$, quam $+\sqrt{(4a^2 + 4ab - c^2)}$: & propterea *lib. 1. art. 313.

propositi problematis duæ dari poterunt solutiones diversæ.

310. Quemadmodum vero duæ istæ solutiones recidunt in unum, quum habetur $c^2 = 4a^2 + 4ab$, quia in hac hypothesi fit semper $x = b + 2a$; ita eædem solutiones evadunt impossibiles, quum c^2 major est, quam $4a^2 + 4ab$, quandoquidem in hoc casu $\surd(4a^2 + 4ab - c^2)$ evadit * quantitas imaginaria. Unde, ut problema, de quo agitur, sit capax solutionis, necesse est, ut c^2 non sit major $4a^2 + 4ab$; hoc est, ut MQ quadratum non sit majus quadruplo rectanguli ABQ.

* lib. 1. art. 316.

311. Sed notetur hoc loco velim, quod si fuerit $c^2 = 4ab$, hoc est MQ quadratum æquale quadruplo rectanguli BAQ; tunc fiet, vel $x = b + 4a$, vel $x = b$. Unde determinabitur linea projectionis, faciendo, vel, ut QN sit æqualis quadruplo ipsius AB, vel etiam, ut sit nullius plane longitudinis: adeo, ut pertinget globus ad datum punctum M, non modo projectione obliqua, verum etiam projectione horizontali. Quod si autem locus datus fuerit in ipsa recta horizontali AE, velut in E; tunc, evanescente $AQ = b$, æquatio fiet $x^2 + c^2 = 4ax$, & erit, vel $x = 2a + \surd(4a^2 - c^2)$, vel $x = 2a - \surd(4a^2 - c^2)$: adeo, ut problema erit solutionis capax, si AE non major sit duplo ipsius AB.

SECTIO II.

De Natura, & Proprietatibus Æquationum.

312. TRadita methodo resolvendi problemata mathematica, mediante calculo litterali, & exemplis, ex universa Mathesi depromptis, eadem illustrata; sequitur modo, ut de natura, & proprietatibus æquationum generatim sermonem instituamus. Jam enim ea methodus in resolutione problematum non alio, quam æquationum, utitur medio. Unde, non aliter, ope ejus methodi, integras, omnibusque numeris absolutas problematum resolutiones assequi licebit, quam theoria æquationum perfecte cognita, ac explorata.

313. Principio autem sciendum est, quod, etsi æquationis, & æqualitatis voces indistincte ab Algebristis accipiantur, nosque etiam promiscue in posterum eas usurpemus; attamen, si de propriis earum vocum significationibus sollicitos nos esse oporteret, subinde quidem æquatio ab æqualitate distinguenda esset, ut æquatio proprie dicenda foret comparatio duarum quantitatum inæqualium, instituta ea ratione, ut reddantur æquales; æqualitas vero comparatio duarum quantitatum jam æqualium, sive ipsa earum quantitatum identitas.

314. Jam æquatio, sumpta pro ipsa æqualitate, est congeries duarum, aut plurium quan-

titatum, ubi eæ, quæ hinc inde ab æqualitatis signo reperiuntur, inter se sunt æquales. Ex hisce quantitatibus una semper incognita sit oportet, & nonnisi ad investigandum valorem ejus usui nobis esse debet æquatio. Sed fieri potest, ut in eadem æquatione, velut orta ex resolutione alicujus problematis indeterminati, duæ, pluresve incognitæ occurrant; & tunc, ad indagandam naturam ejus, selecta incognita principali, ad eam exigi debet æquatio, omnesque aliæ, velut cognitæ, sunt habendæ.

CAPUT I.

Gradus, termini, & formulæ æquationum.

315. UT de natura alicujus æquationis possit dijudicari; gradus, seu sedes ipsius oportet primo loco consideretur. Nam, sicuti non idem est gradus omnium æquationum; ita quælibet æquatio pro gradu, ad quem ascendit, peculiarem sortitur indolem, atque naturam. Qua igitur ratione æquationes dividantur in gradus, primo quidem ostendendum nobis erit. Sed hoc eodem in capite agemus quoque de terminis, & formulis earundem æquationum.

I. Quomodo æquationes dividuntur in gradus.

316. ÆQuationes dividuntur in gradus, ratione maximæ potestatis,

ad

ad quam aſcendit in iis quantitas incognita. Dicuntur enim æquationes ſimplices, ſeu primi gradus, in quibus incognita eſt linearis, ſeu ad primam poteſtatem aſcendit. Dicuntur quadratæ, ſeu ſecundi gradus, quum in iis altior gradus, ad quem attollitur incognita, eſt quadratum, ſeu ſecunda poteſtas. Dicuntur cubicæ, ſeu tertii gradus, quum maxima incognitæ poteſtas eſt cubus; atque ita deinceps.

317. Hac ratione æquatio iſta $x = a + b$ vocatur ſimplex, ſeu primi gradus; quia in ea incognita x ad primam poteſtatem aſcendit. Sed hæc æquatio $x^2 + ax = b^2$ vocatur quadrata, ſeu ſecundi gradus; quia altior gradus, ad quem in ea attollitur incognita x, eſt quadratum, ſeu ſecunda poteſtas. Atque ita quoque hæc altera æquatio $x^3 + ax^2 - abx = c^3$ dicitur cubica, ſeu tertii gradus; quia altior gradus, ad quem in ipſa elevata reperitur incognita x, eſt cubus, ſeu poteſtas tertia.

318. Notandum autem hoc loco eſt, quod æquatio aliqua tunc demum dicitur eſſe illius gradus, quem oſtendit maxima incognitæ poteſtas, quum ad gradum inferiorem deprimi non poteſt. Si enim contingat, ut ea per regulas, inferius tradendas, deprimi queat; tunc dicenda eſt illius gradus, ad quem utique deprimitur. Qua ratione æquatio $x^3 + ax^2 - abx = a^2b$ dicenda eſt ſecundi gradus; quia ſcilicet per ea, quæ inferius dicenda ſunt, deprimi poteſt ad hanc aliam $x^2 = ab$.

319. Jam, ſicuti æquationes dividuntur in gradus, ratione maximæ poteſtatis, ad quam incognita quantitas in iis attollitur; ita proble-

mata dividuntur in certa genera, ratione æquationum, ad quas reducuntur. Quo pacto dicetur problema primi generis, quod reducitur ad æquationem primi gradus; vocabitur problema secundi generis, quod reducitur ad æquationem secundi gradus; atque ita de aliis. Unde, sicuti æquatio ista $x^2 + ax = bc$ dicitur esse secundi gradus; ita problema, unde ea profecta est, secundi generis appellabitur.

320. Sed hic quoque notare oportet, quod, sicuti æquationes dicuntur esse illius gradus, quem ostendit maxima incognitæ potestas, quum ad gradum inferiorem deprimi non possunt; ita problemata dici debent illius generis, quod indicat gradus æquationum, quæ in eorum problematum resolutione inveniuntur, quum propria sedes illarum æquationum in gradu illo subsistit. Unde, sicuti æquatio, quum deprimi potest, dicitur esse illius gradus, ad quem utique deprimitur; ita problema, unde fluxit æquatio illa, ejus generis esse dicetur, quod eadem æquatio depressa demonstrat.

321. Inquirendum sit ergo, cujus gradus sit problema de anguli bisectione. Quem in finem referat ABC semissem anguli dati; & sumpta BA datæ longitudinis, aptetur in eo angulo recta AC, ipsi BA æqualis. Producta ergo BA versus D; fiet CAD angulus datus. Demittantur super ipsis BD, BC perpendicula CD, AE; ponanturque BA $= a$, AD $= b$, & BE $= x$. Erit ergo BD $= a + b$, & BC $= 2x$. Sed BA est ad BE, ut BC ad BD. Itaque erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita $2x$ ad $a + b$; & propterea, quum fiat $2x^2 = a^2 + ab$, sive

FIG. 25.

etiam

etiam $x^2 = (a^2 + ab) : 2$; liquet problema, de quo agitur, esse secundi gradus.

322. Inquirendum sit etiam, cujus gradus sit problema de anguli trisectione. Referat rursus ABC trientem anguli dati; & sumpta adhuc BA datæ longitudinis, aptentur in eo angulo rectæ AC, CF, quarum unaquæque sit æqualis ipsi BA. Producta ergo BC versus G, fiet FCG angulus datus. Demittantur super BG perpendicula AE, FG, ponanturque BA $= a$, CG $= b$, & BE $= x$. Erit igitur BC $= 2x$, & BG $= 2x + b$; & si super BF perpendicularis demittatur CD, ob proportionales BA, BE, BC, BD, fiet BD $= 2x^2 : a$.

323. Quum autem habeatur BD $= 2x^2 : a$, & BA $= a$, erit AD, vel DF $= 2x^2 : a - a$. Unde, quum fiat AF $= 4x^2 : a - 2a$, erit tota BF $= 4x^2 : a - a$. Est vero, ut BA ad BE, ita BF ad BG. Itaque erit in terminis algebraicis, ut a ad x, ita $4x^2 : a - a$ ad $2x + b$: proindeque, multiplicatis extremis, ac mediis, fiet $4x^3 : a - ax = 2ax + ab$, hoc est $4x^3 - 3a^2x = a^2b$, sive $x^3 - 3a^2x : 4 = a^2b : 4$; adeoque, quum æquatio ista sit tertii gradus, nec ad gradum inferiorem deprimi possit, etiam problema de trisectione anguli tertii gradus dicendum erit.

324. Cæterum nolo hic silentio reticere, quod, ad cognoscendum gradum æquationis, necesse est, ut ea sit immunis ab omni quantitate radicali. Ita æquatio $x = \sqrt{ab}$ dicenda est secundi gradus, & non jam primi; quia, ablata exinde radicali, habetur $x^2 = ab$. Et similiter æquatio $x^2 + x\sqrt{ab} = a^2$ dicenda est quarti gradus, & non jam secundi; quia, si ex ea radicalis au-

auferatur, prodibit loco ejus $abx^2 = a^4 - 2a^2x^2 + x^4$. Quare autem id factu est opus; liquido patebit ex iis, quæ deinceps dicenda erunt.

II. *Ratio distinguendi terminos æquationum.*

325. Ostenso, qua ratione æquationes dividuntur in gradus; videamus modo, quo pacto distinguendi sint termini ipsarum æquationum. Hunc in finem notare prius oportet, quod, quum æquationes sint congeries quantitatum, sibi mutuo æqualium, duæ in iis partes distingui debent; quarum una, post debitam reductionem, continebit terminos omnes, in quibus repetitur quantitas incognita; altera omnes alios, qui ex solis cognitis coalescunt. Sic in ista æquatione $x^2 - ax - cx = a^2 - b^2$ partem unam constituunt termini $x^2 - ax - cx$, partem aliam termini $a^2 - b^2$. Et similiter in hac æquatione $x^3 - a^2x = abc$ pars una erit $x^3 - a^2x$, pars altera erit abc.

* *Art.* 117. 326. Sed, ut alibi * etiam dictum est, præstat quandoque, omnes æquationis terminos ad unam, eandemq; partem transferre, ipsamq; æquationem considerare, velut congeriem quantitatum, quæ simul zero, seu nihilo sint æquales: adeo, ut in una æquationis parte omnes ejus termini reperiantur, in parte vero altera existat dumtaxat zero, seu nihil. Ita, si fuerit $x^2 - ax - cx = a^2 - b^2$; erit, transponendo, $x^2 - ax - cx - a^2 + b^2 = 0$. Et similiter, si habeatur $x^3 - a^2x = abc$; erit, per transpositionem, $x^3 - a^2x - abc = 0$.

327. Hanc porro terminorum omnium ad unam

unam partem æquationis transpositionem, præstat subinde quidem efficere, ut terminus ille, in quo existit maxima incognitæ potestas, reperiatur affectus signo +. Ita, si fuerit æquatio $ax - x^2 = c^2$, & transferendi sint in ea termini omnes ad unam partem; peragenda est transpositio ista ea quidem ratione, ut termini incogniti transeant ad partem aliam. Nam, quum terminus, maximam incognitæ potestatem comprehendens, afficiatur signo −; idem, translatus ad partem alteram, prodibit affectus signo +.

328. Ad meliorem æquationis formam, præstat quoque, omnes ejus terminos ordinare, secundum dimensiones, quas in terminis illis habet incognita: adeo nempe, ut primo loco ponatur terminus, comprehendens maximam incognitæ potestatem; tum gradatim omnes alii termini, in quibus incognita pauciores habet dimensiones; ac denique termini illi, qui ex solis quantitatibus cognitis coalescunt, & in quibus incognita ad nullam potestatem attollitur; sive potius ad eam potestatem, cujus exponens est zero, seu nihil.

329. Hac ratione, si fuerit æquatio $ax - x^2 = bx + a^2 - ab$; ea, per transpositionem terminorum omnium ad unam partem, fiet primo $bx + a^2 - ab - ax + x^2 = 0$; tum porro ordinata ea, qua dictum est *, ratione evadet $x^2 + bx - ax + a^2 - ab = 0$. Et similiter, si æquatio, ex resolutione alicujus problematis orta, fuerit $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 = cx^3 - abcx - a^2bx + a^2c^2 - a^2b^2$; hæc, transpositis terminis omnibus ad unam partem, evadet primo $abx^2 + ax^3 - a^2x^2 + x^4 - cx^3$ * art. 328.

$+ abcx$

$+ abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$; deinde vero, dispositis terminis, secundum numerum dimensionum, quas in iis habet incognita, reducetur ad hanc aliam $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$.

330. Quin etiam, in ordinandis æquationibus, præstat, unum infra alium ponere omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet; atque ita etiam scribere terminos illos omnes, qui ex solis cognitis coalescunt, & in quibus incognita nullas dimensiones habere reperitur. Qua ratione novissima æquatio $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx - a^2c^2 + a^2b^2 = 0$ ordinabitur paulo concinnius in hunc modum

$$x^4 \begin{array}{l} + ax^3 + abx^2 + abcx - a^2c^2 \\ - cx^3 - a^2x^2 + a^2bx + a^2b^2 \end{array} = 0.$$

331. Scribendi sunt autem in hunc modum termini omnes, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet; quia scilicet contrahi possunt, & tametsi plures, ad unum tantum revocari. Si enim supponamus $a - c = p$; jam erit $ax^3 - cx^3 = px^3$. Atque ita quoque, ponendo $ab - a^2 = q^2$, & $abc + a^2b = r^3$, erit $abx^2 - a^2x^2 = q^2x^2$, & $abcx + a^2bx = r^3x$. Unde demum, si ponamus $a^2b^2 - a^2c^2 = s^4$; habebitur loco illius æquationis hæc alia longe simplicior $x^4 + px^3 + q^2x^2 + r^3x + s^4 = 0$, ubi tamen nulla signorum habenda est ratio.

332. Possunt etiam parenthesi includi omnes illæ cognitæ quantitates, per quas eadem incognitæ potestas multiplicata reperitur; atque hac ratione adhuc liquido patebit, habendos esse velut unum omnes illos terminos, in quibus incognigni-

gnita eundem dimensionum numerum habet. Ita eandem illam æquationem $x^4 + ax^3 - cx^3 + abx^2 - a^2x^2 + abcx + a^2bx + a^2b^2 - a^2c^2 = 0$ licebit etiam efferre in hunc modum $x^4 + (a - c)x^3 + (ab - a^2)x^2 + (abc + a^2b)x + (a^2b^2 - a^2c^2) = 0$: qua ratione ad unum pariter reducentur omnes illi termini, in quibus incognita x ad eandem potestatem ascendit.

333. In posterum ergo omnes illos terminos, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, velut unum reputabimus: & ea propter distinguemus terminos æquationis, habita ratione dimensionum, quas in iis habet incognita. Ex quo colligere licet, unamquamque æquationem tot terminos habere posse, quot indicat gradus æquationis, auctus unitate una, & non plures: nimirum duos, si æquatio fuerit primi gradus; tres, si secundi; quatuor, si tertii; atque ita deinceps. Nam una cum maxima incognitæ potestate, unde æquationis gradus desumitur, consociari possunt omnes potestates inferiores; & præter eos semper extare debet * terminus alius, ubi incognita ad nullam dimensionem ascendit. * Art. 114.

334. Jam, distinguendo terminos æquationis in hunc modum, dicemus terminum primum, qui maximam incognitæ potestatem comprehendens, ipsius æquationis gradum ostendit; dicemus terminum secundum, in quo incognita dimensiones habet, una pauciores; atque ita deinceps: qua ratione vocabimus ultimum terminum æquationis, qui ex solis cognitis constans, nullam incognitæ dimensionem includit. Sic in æquatione ista secundi gradus $x^2 - ax + b^2 = 0$

pri-

primus terminus erit x^2, secundus $-ax$, & tertius, seu postremus $+b^2$. Atque ita quoque in hac alia æquatione tertii gradus $x^3-ax^2+b^2x-abc=0$ primus terminus erit x^3, secundus $-ax^2$, tertius $+b^2x$, & quartus, seu ultimus $-abc$.

III. Quid ex defectu terminorum intermediorum æquationibus accidit, aperitur.

* art. 333. 335. DIximus paulo superius *, unamquamque æquationem tot terminos habere posse, & non plures, quot indicat gradus æquationis, auctus unitate una. Sed nihil obstat, quominus aliquando unus, vel plures ex terminis intermediis in æquatione deficiant. Ita, si oporteat, inter a, & b invenire mediam proportionalem, quam voco x; habebitur æquatio secundi gradus $x^2=ab$, sive $x^2-ab=0$, quæ secundo termino caret. Et similiter, si inter a, & b binæ mediæ proportionales sint inveniendæ; vocando x primam illarum, orietur æquatio $x^3=a^2b$, sive $x^3-a^2b=0$, quæ secundo, & tertio termino caret.

336. Terminos istos deficientes solent Algebristæ stellulis designare, in eorum locis appositis, ut scilicet defectus eorum statim percipiatur. Unde æquationem $x^2-ab=0$ efferunt hac ratione x^2 * $-ab=0$; & similiter æquationem $x^3-a^2b=0$ repræsentant in hunc modum x^3 * * $-a^2b=0$. Sed notandum hoc loco est, quod, sicuti primus terminus nunquam ab æ-
* art. 334. quatione abesse potest, quia is velut primus * haberi debet, qui maximam continet incognitæ pote-

te-

testatem; ita neque etiam ultimus, hoc est, qui omnino notus est, deficere potest, quia, si utique incognita in terminis omnibus reperitur, potest ea, per divisionem *, e singulis elidi, atque ita terminus haberi, qui ex solis cognitis coalescat. *art. 114.

337. Itaque in æquatione dumtaxat ex terminis intermediis unus, pluresve deficere possunt. Neque vero, per defectum horum terminorum, minuitur gradus æquationis: ut qui ex numero dimensionum, quas in priore termino habet incognita, debet * æstimari. Interim, *art. 316. iis terminis deficientibus, negari non potest, quin æquatio paulo extricatior evadat. Nam, valorem incognitæ x longe facilius percipi, quum habetur $x^2 - ab = 0$, quam quum invenitur $x^2 - cx + d^2 = 0$, nemo non videt. Unde in resolutione problematum eæ semper æquationes sunt præferendæ, quæ, quum sint ejusdem gradus, pauciorem terminorum numerum continent.

338. Omnium autem extricatissimæ sunt illæ æquationes, quæ primo tantum, & ultimo termino constant, ut $x^2 - ab = 0$, $x^3 - a^2b = 0$, $x^4 - a^3b = 0$, &c. Hujusmodi æquationes vocantur passim puræ, ad differentiam illarum, in quibus vel omnes, vel aliquot ex terminis intermediis existunt, quæque communiter dicuntur affectæ. Plane vero puræ æquationes sunt adeo concinnæ, ut in iis valor incognitæ, per solam radicum extractionem, poterit haberi. Ita, si fuerit $x^2 = ab$; extrahendo hinc inde quadratam radicem, fiet $x = \sqrt{ab}$. Et similiter, si habeatur $x^3 = a^2b$; extracta utrinque radice cubica, orietur $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

339. Nolo interim hoc loco reticere, quod

quandoque, defectu terminorum intermediorum, æquationem dati gradus quodammodo ad gradum inferiorem deprimere licet. Ita, si fuerit æquatio quarti gradus $x^4 + abx^2 - a^2c^2 = 0$, quæ secundo, & quarto termino caret; poterit illa ad aliam secundi gradus quodammodo deprimi. Nam, ponendo $x^2 = ay$, & scribendo in æquatione illa ay pro x^2, & a^2y^2 pro x^4; prodibit loco ejus hæc alia $a^2y^2 + a^2by - a^2c^2 = 0$, sive etiam $y^2 + by - c^2 = 0$, quam liquet esse secundi gradus.

340. Patet autem, hujusmodi artificio, tunc demum æquationes deprimi posse, quum numeri dimensionum, quas in terminis æquationis habet incognita, communem aliquem divisorem admittunt. Id vero quum accidit, deprimetur æquatio, capiendo incognitam aliam, quæ, consortio quarundam cognitarum, adæquet eam potestatem incognitæ, in æquatione contentæ, quam maximus eorum numerorum divisor communis ostendit. Ut, si habeatur æquatio $x^{12} - a^4x^8 - a^9b^3 = 0$, erit 4 maximus communis divisor numerorum 12, & 8. Unde, si fiat $a^3y = x^4$, & scribatur a^6y^2 pro x^8, & a^9y^3 pro x^{12}; deprimetur æquatio ad hanc aliam $a^9y^3 - a^{10}y^2 - a^9b^3 = 0$, quæ, divisis terminis omnibus per a^9, reducitur ad $y^3 - ay^2 - b^3 = 0$.

341. Æquationes, quas ad gradum inferiorem exposita * ratione reducere licet, dicuntur derivativæ illius gradus, ad quem reducuntur. Ita æquatio $x^4 + abx^2 - a^2c^2 = 0$ dicitur derivativa secundi gradus; quia, ut vidimus supra *, si fiat $x^2 = ay$, & scribatur ay pro x^2, & a^2y^2 pro x^4, habebitur loco ejus hæc alia y^2

*art. 340.

*art. 339.

$+ by$

$+ by - c^2 = o$. Atque ita quoque æquatio $x^{12} - a^4x^8 - a^9b^3 = o$ dicitur derivativa tertii gradus; quandoquidem, ut modo * observavimus, si ponatur $x^4 = a^3y$, scribaturque a^6y^2 pro x^8, & a^9y^3 pro x^{12}, loco ejus orietur hæc alia $y^3 - ay^2 - b^3 = o$. *art. 340.

342. Cur autem placuerit, subinde hujusmodi æquationes appellare, haud difficile erit intelligere: nimirum, quia innotescit nobis natura talium æquationum statim, ac perspectam, & exploratam habemus indolem illarum, unde ipsæ derivantur. Ita, cognita natura hujus æquationis $y^2 + by - c^2 = o$, innotescit etiam natura istius $x^4 + abx^2 - a^2c^2 = o$, quæ ad eam reducitur, faciendo $x^2 = ay$. Et similiter, ubi nota est nobis indoles hujus æquationis $y^3 - ay^2 - b^3 = o$, nec item ea nos latet, qua referta est hæc altera æquatio $x^{12} - a^4x^8 - a^9b^3 = o$, quæ ad illam revocatur, assumendo $x^4 = a^3y$.

343. Verum quidem est, quod natura æquationum, de quibus hic agimus, pendet, non modo ex natura illarum, ad quas reducuntur, verum etiam ex earum qualitate, quarum ope reductio peragitur. Sed quoniam postremæ istæ æquationes sunt semper ex numero illarum, quas paulo ante * puras appellavimus; eædem nullam difficultatem involvunt, nec ardua res est, ipsarum naturam cognitam, ac exploratam habere. Unde, ad indagandam indolem æquationum principalium, in id potissimum operam dandum, ut illarum, ex quibus derivantur, natura cognita fiat. *art. 338.

IV. *Quomodo æquationes cujusque gradus ad generales formulas reducantur.*

*art. 333. 344. VIdimus superius *, omnes illos terminos alicujus æquationis, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, haberi posse velut unum; & inde duo deduximus. Primum est, quod termini in æquationibus distingui debent, habita ratione dimensionum, ad quas in iis ascendit incognita. Alterum est, quod quælibet æquatio tot terminos, & non plures, habere potest, quot indicat gradus æquationis, auctus unitate una. Hæc vero quum ita sint, licebit modo, cujuscumque gradus æquationes ad formulas quasdam generales revocare.

345. Quod ut rectius intelligatur, sciendum est primo, quod, sicuti in æquationibus termini suam sumunt denominationem a numero dimensionum, quas in iis habet incognita; ita quantitates cognitæ, quæ in iisdem terminis existunt, communiter vocari solent coefficientes eorum terminorum. Jam, sicuti in singulis æquationibus coefficiens primi termini est semper unitas; ita in aliis terminis coefficientes alii, semper, atque alii esse possunt. Sed nihil interim vetat, hujusmodi coefficientes exhibere generaliter, ac indefinite per litteras p, q, r, s, &c. Plane vero, exhibitis in hunc modum iis coefficientibus, formulæ habebuntur generales æquationum cujusque gradus.

346. Hac ratione æquationes secundi gradus tres terminos, & non plures, habere possunt.

sunt. Itaque, sicuti unitas est coefficiens primi termini, sic vocetur p coefficiens secundi termini, & q coefficiens tertii termini, sive potius ipse terminus tertius, qui omnino notus esse debet. Jamque, nulla habita signorum, quibus termini afficiuntur, ratione, sub hac formula generali $x^2 + px + q = 0$ æquationes omnes secundi gradus comprehendere licebit. Et eadem ratione erit $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ formula generalis, ad quam reducuntur æquationes omnes tertii gradus; $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ formula generalis, omnes quarti gradus æquationes comprehendens; atque ita deinceps.

347. Referunt autem formulæ illæ æquationes omnes ejus gradus, cujus ipsæ sunt formulæ; ubi signorum, quibus termini afficiuntur, nulla ratio velit haberi. Sed, si ad signa etiam debeat attendi; tunc, pro diversitate signorum, quibus termini affici possunt, variæ item erunt formulæ unius, ejusdemque gradus. Ita in æquationibus secundi gradus, etsi primus terminus semper concipi debet affectus signo +, tamen alii duo termini affici possunt, modo signo +, modo signo −. Unde, pro singulis casibus, qui locum habere queunt, quatuor erunt formulæ talium æquationum, nimirum I. $x^2 - px - q = 0$, II. $x^2 + px - q = 0$, III. $x^2 - px + q = 0$, IV. $x^2 + px + q = 0$.

348. Similiter in æquationibus tertii gradus primus terminus semper quidem concipiendus est affectus signo +; sed quisque trium reliquorum terminorum, tum signo +, cum signo − affici potest. Quare, perlustratis singulis casibus, qui possunt locum habere, compe-

riemus, formulas æquationum tertii gradus esse octo sequentes, nimirum I. $x^3 - px^2 - qx - r = o$, II. $x^3 - px^2 + qx - r = o$, III. $x^3 - px^2 - qx + r = o$, IV. $x^3 - px^2 + qx + r = o$, V. $x^3 + px^2 - qx - r = o$, VI. $x^3 + px^2 + qx - r = o$, VII. $x^3 + px^2 - qx + r = o$, VIII. $x^3 + px^2 + qx + r = o$. Nec dissimiliter pro aliis gradibus formulæ determinabuntur.

349. Quæ modo ab Algebristis formulæ dicuntur, olim ab Italis nostris capitula vocabantur. Iidem autem æquationis incognitam, sive quæsitam quantitatem, rei nomine designabant; ejusque potestates vocabulis quadrati, cubi, quadrato-quadrati, ut hodie fieri solet, exprimebant. Ultimum porro æquationis terminum, quia in Algebra ipsorum numerosa erat semper numerus aliquis, non aliter, quam numerum vocitabant. Unde, hisce vocibus, cujusque capituli terminos a se invicem distinguebant.

350. In ordinandis autem capitulis, subinde terminos hinc inde transferebant, ut quisque terminus signo + affectus reperiretur. Unde in æquationibus, exempli gratia, secundi gradus prior, quam attulimus *, formula $x^2 - px - q = o$ vocabatur ab eis capitulum, in quo quadratum est æquale rebus, & numero; quia nempe, transponendo, loco ejus habetur $x^2 = px + q$. Et, ob eandem rationem, secunda formula $x^2 + px - q = o$ erat eis capitulum, in quo quadratum, & res adæquant numerum; quia scilicet, per transpositionem, formula illa evadit $x^2 + px = q$.

* art. 347.

351. Hæc idcirco referre volui, ut lectio no-

nostrorum Italorum, diversitate vocum, quibus usi sunt, difficultatem non faciat. Et, ob eandem rationem, nec etiam silentio prætereundum, quod, sicuti quæsitam quantitatem, sive incognitam æquationis rei nomine vocitabant; ita artem ipsam, per quam æquatio resolvitur, & incognitæ valor detegitur, rei regulam nuncupabant: indeque nati sunt etiam numeri cossici, ab Italo nempe vocabulo, cui latina vox rei correspondet.

V. Quomodo per unitatem in æquationum terminis homogeneitas observetur.

352. CUjusque sint gradus æquationes, quæ in resolutione problematum inveniuntur, illud in iis sedulo observabit Analysta, ut termini omnes sint homogenei; hoc est, ut singuli eundem cum priore dimensionum numerum habeant. Hæc terminorum homogeneitas in æquationibus numericis, ubi nempe quantitates cognitæ numeris exprimuntur, semper quidem potest considerari. Nam quilibet numerus fingi potest, veluti ortus ex multiplicatione sui ipsius per quamcumq; potestatem unitatis: proindeque in omni numero tot semper dimensiones, quot libuerit, distinguere licebit.

353. Ita, si fuerit æquatio numerica $x^3 - 2x^2 + 5x + 15 = 0$, quemadmodum in ea prior terminus x^3 tres continet dimensiones, ita & in omnibus aliis terminis tres quoque dimensiones poterunt distingui. Nam, considerando numerum 2, velut unius dimensionis; erit trium dimensionum secundus terminus $- 2x^2$. Et similiter, considerando numerum 5, veluti ortum

ex multiplicatione ipsius 5 per unitatem; erit ille duarum dimensionum; & consequenter tertius terminus + $5x$ tres dimensiones habebit. Atque ita quoque, si ultimum terminum + 15 consideremus, veluti genitum ex multiplicatione ejusdem numeri 15 per quadratum unitatis; in eo tres item dimensiones poterunt distingui.

354. Hæc eadem terminorum homogeneitas in æquationibus litteralibus semper etiam locum habebit, ubi nomina quantitatibus imponuntur, secundum propriam ipsarum naturam; hoc est, ubi designantur unica littera quantitates unius dimensionis; duabus litteris, per se mutuo multiplicatis, quantitates duarum dimensionum; atque ita de aliis. Ita, si in triangulo isoscceli quæratur perpendiculum, demissum super basi, ex datis area, & perimetro; invenietur hæc æquatio $x^3 - a^2x + 2abc = 0$, in qua omnes termini sunt homogenei: siquidem semissis datæ perimetri, velut unius dimensionis, vocetur a; & area data, tamquam duarum dimensionum, vocetur bc.

355. Quod si autem denominatio quantitatum non fiat, secundum propriam earum naturam; tunc equidem æquationes, quæ pro resolutione problematum inveniuntur, non habebunt omnes terminos homogeneos. Ita, si in triangulo rectangulo ex datis area, & hypothenusa quærantur crura, voceturque a hypothenusa data, b duplum datæ areæ, & x unum ex cruribus; prodibit hæc æquatio $x^4 - a^2x^2 + b^2 = 0$, in qua non omnes termini sunt homogenei. Quod sane ex eo repeti debet, quia area

da-

data, veluti duarum dimensionum, & consequenter duplum ejus, non unica, sed duabus litteris, per se mutuo multiplicatis, debet designari.

356. Sed nihil obstat, quominus etiam in hoc casu terminos æquationis, velut homogeneos, consideremus: nimirum, si quemadmodum inter quantitates, numeris designatas, consideratur una, ad quam omnes aliæ referuntur, quæ unitas dicitur; ita eandem unitatem consideremus quoque inter quantitates, quæ literis exprimuntur: adeo, ut ad eam omnes aliæ quantitates perinde se habeant, ac numeri omnes ad unitatem. Sic enim in æquationibus termini illi, qui pauciores, aut plures habent dimensiones, quam in primo termino continentur, ope unitatis, fingi possunt, tot dimensiones habere, quot ad servandam homogeneitatem requiruntur.

357. Ita, si fuerit æquatio $x^3 - bx + a^2b^2 = 0$, quia in ea primus terminus x^3 tres continet dimensiones, ad servandam homogeneitatem, necesse est, ut alii termini tres itidem dimensiones contineant. Unde, quia terminus $-bx$ videtur esse duarum dimensionum; cogitandum est, terminum illum multiplicatum esse per unitatem, atque ita non duas, sed tres dimensiones habere. Pariterque, quia terminus $+a^2b^2$ videtur quatuor dimensiones comprehendere; fingi potest, terminum illum divisum esse per unitatem, atque ita non quatuor, sed tres dimensiones includere.

358. Non dissimiliter consideranda est etiam homogeneitas in terminis æquationum, quum

sub

ſub quibuſdam formulis generalibus exhibentur. Nam quotieſcumque, exempli gratia, æquationes omnes tertii gradus, nulla habita ratione ſignorum, quibus termini ipſarum affici poſſunt, comprehenduntur * ſub hac formula generali $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; proculdubio lex homogeneitatis non videtur obſervata. Sed nihilominus, conſiderando tertium terminum qx, veluti multiplicatum per unitatem, & terminum ultimum r, veluti ductum in quadratum unitatis; habebunt termini illi, perinde ac duo priores, tres dimenſiones; atque ita omnes termini erunt homogenei inter ſe.

* art. 346.

359. Hac autem ratione non modo illud fieri poteſt, ut partes omnes unius, ejuſdemque quantitatis æque multis dimenſionibus conſtent, verum etiam hoc amplius poteſt obtineri, ut quantitates omnes per ſolas linearum longitudines exhiberi queant, licet plures dimenſiones habere videantur. Quemadmodum enim, ut ex iſta quantitate $a^2b^2 - b$ extrahi poſſit radix cubica, cogitandum eſt, partem unam a^2b^2 diviſam eſſe per unitatem, & partem alteram $- b$ ductam eſſe in quadratum unitatis; ita quoque, ſi concipiatur quantitas a^2 diviſa per unitatem, & quantitas a^3 diviſa per quadratum unitatis, utraque poterit per ſimplicem lineam exhiberi.

360. Et ſane, invecta in Geometriam unitate, licebit, multiplicationem, diviſionem, & radicum extractionem perinde lineis perficere, ac numeris fieri ſolet. Nimirum primo multiplicantur per ſe mutuo numeri duo, quum tertius invenitur, qui ſit ad unum ipſorum, ut eſt alter ad unitatem. Ergo ad eundem modum ſi AB
FIG. 25.

ſit

sit unitas, & oporteat, multiplicare BD per BC; jungantur puncta A, & C per rectam AC; &, ducta DE, ipsi AC parallela, erit BE productum hujus multiplicationis. Nam, propter triangula æquiangula BDE, BAC, ut est BE ad BD, ita est BC ad BA. 4.

361. Secundo dividitur numerus unus per numerum alium, quum tertius invenitur, qui sit ad dividendum, ut est unitas ad divisorem. Itaque, assumpta rursus AB pro unitate, si oporteat, dividere BE per BD; jungantur puncta D, & E per rectam DE; &, ducta AC, ipsi DE parallela, erit BC quotiens hujus divisionis. Nam, quum triangula BAC, BDE sint æquiangula; erit, ut BC ad BA, ita BE ad BD; & consequenter, permutando, ut BC ad BE, ita BA ad BD.

362. Denique extrahitur ex aliquo numero radix quæcumque, quum inter ipsum, & unitatem tot mediæ proportionales inveniuntur, quot designat exponens radicis extrahendæ, minutus unitate; hoc est una, si radix sit quadrata; duæ, si cubica; tres, si quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Quare, posita semper AB, velut unitate, si oporteat, exempli gratia, extrahere radicem quadratam ex BC; ponantur indirectum rectæ AB, BC; &, descripto super AC, velut diametro, semicirculo ADC, erit perpendicularis BD radix quæsita. Nam, propter notissimam circuli proprietatem, AB est ad BD, ut est BD ad BC. FIG. 26.

VI.

VI. Theoriæ præcedentis plenior explicatio, ubi de vero usu unitatis.

363. QUod modò dictum est de usu unitatis in Geometria, nonnihil negotii Tironibus facessit: ut qui edocti ab Euclide, duas lineas, per se mutuo multiplicatas, rectangulum producere, non ita facile intelligunt, qua ratione ex earundem linearum multiplicatione possit alia linea simplex oriri; quum exinde illud ipsis sequi videatur, ut linea, & rectangulum a se mutuo differre non debeant. Quare notandum hoc loco est, quod ex multiplicatione duarum linearum, nec linea alia simplex, nec rectangulum oritur; sed dumtaxat designari potest productum illud, tum per rectangulum, sub iis lineis contentum, cum per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem.

364. Id ut clarius intelligatur, advertendum est prius, in universa Mathesi quantitates considerari, non quidem in se ipsis, sed pro relationibus, quas servant inter se mutuo; quandoquidem, sicuti intima cujusque rei substantia penitus nos latet, ita & quantitatis principium, cujuscumque ea sit generis, omnino nos fugit. Hinc itaque fit, ut, quum quæritur productum, quod oritur ex multiplicatione duarum linearum, quarum unam voco *a*, alteram *b*; dumtaxat designari debeat relatio, quam productum illud habet ad aliud, genitum ex multiplicatione duarum quarumvis aliarum linearum, puta *c*, & *d*; nec de vera utriusque producti magni-

tu-

tudine sollicitos nos esse oportet, quia sicuti linearum, ita & producti, ex earum multiplicatione orti, vera magnitudo sciri non potest.

365. Jam productum ex primis ab est ad productum ex secundis cd in ratione composita ex a ad c, & ex b ad d. Unde facile erit, ostendere, unumquodque eorum productorum designari posse, tum per rectangulum, contentum sub lineis, ex quarum multiplicatione oritur, cum per lineam aliam, quæ sit ad unam illarum, ut est altera ad unitatem. Nam primo, si fuerint rectangula duo, unum contentum sub lineis a, & b, alterum contentum sub lineis c, & d; habebunt rectangula ista rationem compositam ex a ad c, & ex b ad d. Et secundo, si fiat, ut unitas ad a, ita b ad p; & rursus, ut unitas ad c, ita d ad q: ratio, quam habet p ad q, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

366. Horum primum patet ex Elementis; quum ostensum sit ab Euclide, non modo rectangula, sed omnia parallelogramma æquiangula rationem habere, ex lateribus compositam. Sed & alterum ostendi potest in hunc modum. Ratio, quam habet p ad q, componitur ex rationibus, quæ sunt inter p, & b; inter b, & d; & inter d, & q. Sed ex constructione p est ad b, ut est a ad unitatem; & d est ad q, ut est unitas ad c. Quare eadem ratio, quam habet p ad q, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & unitatem; inter b, & d; & inter unitatem, & c. Jam vero rationes, quæ sunt inter a, & unitatem; & inter unitatem, & c, componunt simplicem rationem, quæ est inter a, & c. Itaque ra-

ratio, quam habet p ad q, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

367. Atque hac ratione, aliud agentes, verum, quem unitas præstat in Geometria, usum aperuimus: nimirum rationes, quæ ex duabus, aut pluribus componuntur, ope unitatis, ad simplices revocantur: id, quod etiam paulo facilius ostendi potest in hunc modum. Vocetur n quantitas illa, quæ, velut unitas, adhibetur. Jamque, faciendo, ut n ad a, ita b ad p; erit $np = ab$. Et similiter, faciendo, ut n ad c, ita d ad q; habebitur $nq = cd$. Quare erit, ut np ad nq, ita ab ad cd. Sed np est ad nq, ut p ad q; & ab est ad cd in ratione composita ex a ad c, & ex b ad d. Itaque etiam ratio, quam habet p ad q, componetur ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

368. Id autem quum ita sit, liquido patet, quod, etsi unitatis artificium in Geometria non adhibuerint Veteres, ipsum tamen usum unitatis alia ratione, & quidem meo judicio præstantiore, fuerint consequuti. Si enim ratio, composita ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d, more Veterum, ad simplicem esset revocanda: assumpta magnitudine p, id quidem fieri deberet, ut a sit ad c, veluti est p ad m; & b sit ad d, veluti est m ad q. Nam ratio, quam habet p ad q, velut composita ex rationibus, quæ sunt inter p, & m; & inter m, & q, componetur eo ipso ex rationibus, quæ sunt inter a, & c; & inter b, & d.

369. Plane vero hæc methodus revocandi rationes compositas ad simplices concinnior est ea, quæ, ope unitatis, absolvitur. Si enim data

ra-

ratio componatur ex tribus rationibus; adhibita unitate, quater quidem instituenda esset regula trium; quum tamen, more Veterum, satis sit, ter tantum eam instituere. Atque ita quoque, si data ratio ex quatuor rationibus sit composita; ea non aliter, unitatis ope, ad simplicem revocabitur, quam adhibendo sexies regulam trium; sed, Veterum more, quater tantum hæc regula erit instituenda. Interim ex unitate hoc percipitur commodi, quod ope ejus quælibet quantitas independenter ab aliis unius dimensionis evadit.

370. Cæterum, sicuti, in rationibus compositis ad simplices revocandis, primam magnitudinem ad libitum Veteres assumebant, quam tamen deinde retinebant eandem, & invariatam; ita pro unitate quælibet quantitas potest assumi, quam tamen assumptam mutare amplius non licet. Nec ad rem facit, quod aliæ lineæ oriuntur ex multiplicationibus duarum linearum, quum assumitur quantitas una pro unitate, & aliæ, quum assumitur quantitas altera. Hinc enim non sequitur, producta earum multiplicationum variari; quia rursus sciatur velim, lineas, non veras productorum magnitudines, sed tantum rationes, quas habent inter se mutuo, designare.

371. Quod de unitate, respectu multiplicationis, dictum est, illud idem intelligi debet, tum respectu divisionis, cum relate ad radicum extractiones. Quia vero mirum fortasse videri potest, quod superius diximus *, ex multiplicatione duarum linearum, nec lineam aliam simplicem, nec rectangulum oriri; juvabit, ani- *art.363.

mad-

madvertere, quod si ex multiplicatione duarum linearum oriretur rectangulum; amplissimæ Geometriæ scientiæ jam fines essent angustissimi. Nam, etsi dici possit, oriri solidum ex multiplicatione trium linearum; attamen, quum lineæ, quæ multiplicari debent inter se, sunt plures, quam tres, dici nequit, quid exinde oriatur; quandoquidem in rerum natura non est aliquid contentum pluribus, quam tribus dimensionibus.

372. Id norunt etiam ex ipsis Veteribus Mathematicis nonnulli. Nam, ut ex Pappo discimus, quæstionem illam, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius ex Veteribus resolvere penitus potuerat, quidam ad sex tantum lineas extendebant; quia, si plures essent, quam sex, non audebant dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur; quoniam non est aliquid contentum pluribus, quam tribus dimensionibus. Sed alii non veriti fuerunt, ad quemcumque numerum linearum quæstionem illam extendere: interpretando paulo aliter producta, quæ ex duarum, aut plurium linearum oriuntur multiplicatione: nimirum, velut quantitates, quarum ratio ex duabus, aut pluribus rationibus componatur.

373. Cæterum unitatem in Geometriam primus omnium invexisse creditur Cartesius. Sed, etsi ei ferri debeat acceptum mirum, quod ex ea trahitur, emolumentum; primam tamen ejus ideam præbuit Italus noster Raphael Bombellius. Ubi enim in sua Algebra docet, qua ratione radices ex numeris per lineas extrahi possint, unitatem ad hoc opus usurpat; & eas me-

medias proportionales, quas extrahenda radix exposcit, reperit inter duas lineas, quarum altera refert unitatem, altera numerum, unde radix extrahi debet. Nec dubium esse potest, quin Algebra Bombellii in Cartesii manus pervenerit. Nam in sua Geometria meminit regulæ, a Bombellio excogitatæ, pro dividendis æquationibus quarti gradus in duas alias, quæ ad secundum dumtaxat gradum ascendant.

CAPUT II.

Radices æquationum, earundemque species variæ.

374. PRæcedenti capite egimus de gradibus, terminis, & formulis æquationum; nunc de radicibus ipsarum, & de variis earum speciebus agendum nobis erit. Nosse autem oportet, tum numerum radicum, quas admittunt æquationes, cum earum qualitates, seu species; quia exinde casus problematum perspecti nobis fiunt, ac explorati. Jam enim notum est, posse quandoque problema multiplices casus involvere. Plane vero, non aliunde id oriri, putandum est, quam quia æquatio, ad quam problema reducitur, variis multiplicibusque radicibus potest explicari.

I. Quid in æquatione radicis nomine veniat, & quot in ea sint distinguenda.

375. RAdicem æquationis vocant Algebristæ valorem, quem in ea ha-

habet quantitas incognita. Ita, si fuerit æquatio $x = a$, sive $x - a = o$; radix æquationis erit quantitas a, utpote valor incognitæ x. Et similiter, si habeatur æquatio $x^2 = ab$, sive $x^2 - ab = o$; erit $\sqrt{ab}$ radix ipsius. Nam, si ex utraque parte hujus æquationis $x^2 = ab$ extrahatur quadrata radix, prodibit $x = \sqrt{ab}$.

*art. 326. 376. Jam, considerando * æquationes, velut congeries quantitatum, quæ omnes simul sint nihilo æquales; perspicuum est, radicem æquationis talem esse debere, ut, si in ea loco incognitæ substituatur, efficiat, revera quantitates omnes evanescere. Unde hac ratione facile erit, experiri, num quantitas aliqua sit radix æquationis, nec ne; quia id tantum inquirendum erit, num, ea loco incognitæ subrogata, æquationis termini omnes revera evanescant.

377. Quæratur, exempli gratia, num numerus 2 sit radix hujus numericæ æquationis $x^2 - 5x + 6 = o$. Substituatur ipse numerus 2 loco incognitæ x, & ejus quadratum 4 loco x^2. Jamque, facta substitutione ista, æquationis termini omnes, contrarietate signorum, sese mutuo destruent; quum $4 - 10 + 6$ idem sit, ac nihil. Quare concludendum est, in æquatione proposita $x^2 - 5x + 6 = o$ valorem incognitæ x esse numerum 2; atque adeo eundem numerum 2 esse radicem ipsius æquationis.

378. Eadem ratione cognoscemus, quantitatem a esse valorem incognitæ x in hac æquatione $x^2 - ax - bx + ab = o$, atque adeo radicem ipsius æquationis; quia scilicet, si in ea ponatur a loco x, & a^2 loco x^2, termini omnes, contrarietate signorum, quibus afficiuntur, evane-

nescent, nec aliquid superererit. Sed ejusdem æquationis quantitas $2a$ néquaquam est radix; quia, facta substitutione, relinquitur $2a^2 - ab$, nec termini ejus sese mutuo destruunt.

379. Omnis autem æquatio, quum plures habet dimensiones, plures item radices admittit. Sic in eadem illa æquatione numerica $x^2 - 5x + 6 = o$, si pro x scribatur numerus 3, & pro x^2 numerus 9; producetur $9 - 15 + 6$, quod idem est, ac zero, seu nihil. Unde, quia, non modo numerus 2, verum etiam numerus 3, reddit terminos illius æquationis conjunctim æquales zero, seu nihilo; consequens est, ut radix ejus æquationis sit, tam numerus 2, quam numerus 3.

380. Similiter æquationis hujus litteralis $x^2 - ax - bx + ab = o$ radix, non modo est quantitas a, verum etiam quantitas b. Nam, sicuti, substituendo a loco x, & a^2 loco x^2, producitur $a^2 - a^2 - ab + ab$, quod perinde valet, ac zero, seu nihil; ita quoque, si substituatur b loco x, & b^2 loco x^2, prodibit $b^2 - ab - b^2 + ab$, cujus partes, contrarietate signorum, sese mutuo destruunt.

381. Atque ita quoque æquationis hujus numericæ $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = o$ radix erit quilibet numerorum 2, 3, 4; quia, sive pro x scribatur numerus 2, sive numerus 3, sive numerus 4, producetur semper zero, seu nihil; & unusquisque eorum numerorum implebit conditionem incognitæ x, efficiendo, ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur zero, seu nihilo.

382. Unde autem fiat, ut una, eademque æquatio, quum ad plures dimensiones ascendit,

 plu-

plures item radices possit habere; jam quidem ini-
* art. 374. tio hujus capitis * innuimus. Nimirum unum, idemque problema, tametsi determinatum, potest quandoque plures casus, pluresque adeo solutiones admittere. Itaque, ut problemati possit per singulos casus satisfieri, invenitur in ejus resolutione æquatio talis, quæ tot radices admittet, quot modis problema solvi poterit.

383. Ita, si numerus quæratur, qui subductus a 5 det tale residuum, ut quod producitur ex multiplicatione ejus per eundem illum numerum, sit 6; vocando x numerum quæsitum, orietur æquatio $5x - x^2 = 6$, sive $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ sunt radices, una nempe 2, & altera 3. Id vero exinde dependet, quia problema duobus modis solvi potest, ejusque conditiones adimplet, tam numerus 2, quam numerus 3.

FIG. 27. 384. Similiter, si dato circulo ACB, quæratur punctum, in quo ejus circumferentia secatur a recta DC, quæ ducitur æquidistanter diametro AB ad datum intervallum; quia duo sunt puncta interfectionum, duo item responsa admittit problema; proindeque æquatio, interfectionem determinans, duas debet radices habere, quibus utraque interfectio determinetur. Et profecto, si ponatur perpendiculum $CE = a$, diameter $AB = b$, & segmetum $AE = x$; invenietur æquatio $bx - x^2 = a^2$, sive $x^2 - bx + a^2 = 0$, cujus pro duplici dimensione duæ item sunt radices.

385. Quippe sciendum, æquationem omnem tot radices, seu diversos valores habere posse, quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

res. Sic æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ duas habet radices 2, & 3, non autem plures. Nam quilibet eorum numerorum, scriptus in æquatione loco incognitæ x, efficit, ut termini omnes, contrarietate signorum, se mutuo destruant; & præter eos, nullus alius numerus potest inveniri, cujus substitutione hoc idem eveniat. Pariterque æquationis hujus $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ tres tantum sunt radices, & non plures; quum dumtaxat numeri 2, 3, 4 possint incognitæ x conditiones adimplere.

II. Variæ radicum species, quæ in æquationibus esse possunt, ostendantur.

386. Radices æquationum, non modo positivæ, sed etiam negativæ esse possunt. Sic æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$, pro duplici dimensione, duæ quidem sunt radices; sed illarum una est positiva, altera negativa. Nam ex duobus numeris, qui scripti loco incognitæ x, efficiunt, æquationis terminos omnes evanescere, unus quidem est 2, alter -5: proindeque in illa æquatione, non modo 2, verum etiam -5 esse potest valor incognitæ x.

387. Sic etiam in hac æquatione $x^3 - 19x + 30 = 0$, quæ, pro triplici dimensione, tres item radices admittit, duæ ex radicibus sunt positivæ, una vero negativa. In ea enim, sive scribatur 2, sive 3 loco incognitæ x, semper æquationis termini omnes, contrarietate signorum, evanescent. Verum, quia hoc idem evenit quoque, si pro x ponatur -5, consequens est, ut

pro valore incognitæ x assumi possit, non modo quilibet ex numeris positivis 2, & 3, verum etiam numerus negativus — 5.

388. Jam, quemadmodum numerus radi-
*art.382. cum, quas admittit æquatio, ostendit *, quot modis problema solvi potest; ita species, seu qualitas cujusque radicis indicat statum, in quo consideranda est quantitas, ut per eam problemati satisfieri queat. Ita, si quæratur, quantum habeat in bonis, qui lucratus aureos 100, reperitur habere 60; fiet æquatio $x + 100 = 60$, hoc est $x + 40 = 0$. Unde, quum valor incognitæ x sit negativus; dicendum est, eum, non modo nihil in bonis habere, sed carere quadraginta, ut lucratus aureos 100, dici possit habere 60.

389. Similiter, si quæratur, dati spatii pedum duodecim, quantum aliquis debeat percurrisse, ut possit reliquum ejusdem spatii quatuor gradibus velocitatis eodem omnino tempore percurrere, quo alter percurreret spatium totum tribus gradibus velocitatis; invenietur æquatio $36 - 3x = 48$, hoc est $x + 4 = 0$. Quocirca, quia valor incognitæ x est negativus; concludendum est, eum, non modo nihil dati spatii debere percurrisse, sed regredi oportere per quatuor pedes, quo in fine temporis possit ad datam metam una cum altero corpore pervenire.

390. Ex quibus patet, quod, quum in resolutione problematum invenitur æquatio, cujus radix est negativa, problema non est rite conceptum, sed paulo aliter debet enunciari.
*art.388. Qua ratione, non quidem quæri debet *, quantum habet in bonis, sed quantum ei deest, qui lu-

lucratus 100, reperitur habere 60. Et similiter, non quæri debet *, quantum dati spatii debeat *art. 389. aliquis percurrisse, sed quantum regredi debeat, quo possit quatuor gradibus velocitatis ad datum terminum pervenire eodem omnino tempore, quo alter tribus gradibus velocitatis, in principio spatii constitutus, ad eundem terminum pertingeret.

391. Eædem radices negativæ occurrunt etiam in æquationibus, quæ pro resolutione problematum geometricorum inveniuntur; & *lib. 1. art. 323. in hoc casu explicandæ sunt* illæ per lineas, tendentes ad plagam, oppositam ei, versus quam diriguntur lineæ, radices positivas explicantes. Oportet, exempli gratia, datam rectam AB FIG. 28. producere versus B, usque donec rectangulum ACB sit æquale quadrato ipsius AB. Sane, positis AB $= a$, & AC $= x$, invenietur æquatio $x^2 - ax = a^2$, sive $x^2 - ax - a^2 = 0$.

392. Jam hujus æquationis, pro duplici dimensione, duæ sunt radices; earumque una est $(1 + \sqrt{5})a : 2$, altera $(1 - \sqrt{5})a : 2$. Inde ergo inferre licet, propositum problema duas solutiones admittere. Sed, quoniam ex iis radicibus prior est positiva, & posterior est negativa; liquet, datam rectam AB protrahi posse non modo versus B, sed etiam versus plagam oppositam A; adeoque non rite concipi problema, ubi recta AB protrahenda proponitur tantum versus B.

393. Cæterum radices æquationum non semper sunt reales, sed quandoque esse possunt *lib. 1. art. 316. imaginariæ: scilicet, quum eas ingreditur * radix quadrati negativi. Ita æquationis hujus $x^2 -$

$6x + 10 = 0$, pro duplici dimensione, duæ quidem sunt radices, sed earum utraque est imaginaria. Nam ex duobus numeris, qui substituti in æquatione $x^2 - 6x + 10 = 0$ efficiunt, omnes ejus terminos evanescere, unus est $3 + \sqrt{-1}$, alter $3 - \sqrt{-1}$, quorum utrumque liquet nonnihil imaginarii involvere.

394. Similiter æquationis hujus $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, pro tribus dimensionibus, quas in ea habet incognita x, tres quidem sunt radices. Verum ex iis una tantum est realis, & aliæ duæ sunt imaginariæ. Nam, sicuti, scribendo in ea æquatione loco incognitæ x numerum realem, eumque positivum 2, evanescunt, contrarietate signorum, omnes ejus termini; ita hoc idem evenit quoque, si loco ejusdem incognitæ scribatur, vel $+ \sqrt{-4}$, vel $- \sqrt{-4}$, quorum uterque est numerus imaginarius.

395. Quemadmodum autem radices nega- *art. 390. tivæ ostendunt * nobis, problema non esse rite conceptum, sed debere paulo aliter enunciari; ita radices imaginariæ indicio nobis esse possunt, problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem aliquam involvere, atque adeo moderandum esse aliquo modo, quo capax fiat solutionis. Non raro enim contingit, ut id, quod quæritur, etsi determinatum, nequeat inveniri iis conditionibus, quæ apponuntur in problemate. Unde, ne æquatio casus problematis impossibiles exhibeat possibiles; æquum est, ut radices, casus illos ostendentes, prodeant imaginariæ.

396. Id, ut exemplo notissimum fiat, assu- *art. 384. matur æquatio $x^2 - bx + a^2 = 0$, superius *

in-

inventa, pro determinandis punctis, in quibus circulus ACB secatur a recta DC, quæ ducitur æquidistanter diametro AB ad datum intervallum. Jam ex duabus radicibus hujus æquationis una est $b : 2 + \surd(b^2 : 4 - a^2)$, altera $b : 2 - \surd(b^2 : 4 - a^2)$; quandoquidem utraque harum quantitatum conditiones adimplet incognitæ x. Sed perspicuum est, radices illas esse reales, quum a non major est, quam $b : 2$; esse vero imaginarias, quum vicissim a major supponitur, quam $b : 2$. FIG. 17.

397. Itaque, quia in problemate, unde profecta est æquatio illa, duæ sunt appositæ conditiones; una, ut recta DC duci debeat æquidistanter diametro AB; & altera, ut intervallum ejus ab eadem diametro debeat esse a: necesse est, ut aliqua ex iis conditionibus pugnet cum eo, quod quæritur, ubi a major est, quam $b : 2$. Et sane, quia omnis recta, circulo occurrens, distat a centro, intervallo, non majore semidiametro; fieri nequit, ut recta DC occurrat semicirculo, ubi a major est, quam $b : 2$; quia distantia ejus a centro major esset semidiametro.

398. Quum ergo problema in iis, in quibus proponitur, terminis contradictionem involvat: quo idem capax fiat solutionis, oportet, conditionem illam, quæ pugnat cum eo, quod quæritur, subinde temperare, ut evanescat contradictio, quæ antea solutioni problematis obstabat. Fiet id vero, minuendo datum intervallum eo usque, donec non majus sit semidiametro circuli. Ita enim quantitas $\surd(b^2 : 4 - a^2)$ nulla quidem esse poterit, sed nequaquam imaginaria; proindeque problema, de quo agitur, semper erit capax solutionis.

III. *Æquationum, quarum plures sunt radices, constitutio explicatur.*

399. ÆQuationes, quarum plures sunt dimensiones, & consequenter plures radices, constituuntur per mutuam multiplicationem æquationum simplicium, quæ radices illas continent. Ita, pro constitutione hujus æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus duæ radices sunt 2, & 3, cogitandum est, incognitam x ambigue significare numeros illos, & esse, tum $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, cum $x = 3$, sive $x - 3 = 0$. Nam, multiplicatis deinde per se mutuo duabus hisce æquationibus $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, prodibit æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$.

400. Quæratur similiter constitutio hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus tres radices sunt 2, 3, 4. Sane æquationes simplices, quæ illas continent radices, sunt $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, sive etiam $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$. Itaque multiplicetur primum $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$; jamque, si productum ex duabus hisce æquationibus $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplicetur adhuc per $x - 4 = 0$, habebitur demum $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ est æquatio proposita.

401. Nihilo secius constituuntur æquationes, quarum radices sunt negativæ. Ita æquationis hujus $x^2 + 9x + 20 = 0$ utraque radix est negativa, quum una sit -4, altera -5. Unde, si fiat $x = -4$, sive $x + 4 = 0$, & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$; tum multiplicetur

$x +$

$x + 4 = 0$ per $x + 5 = 0$, prodibit æquatio proposita $x^2 + 9x + 20 = 0$. Atque ita quoque, sicuti radices duæ hujus æquationis $x^2 + 8x + 12 = 0$ sunt -2, & -6; ita constituetur eadem æquatio, multiplicando $x + 2 = 0$ per $x + 6 = 0$.

402. Eadem ratione constituuntur etiam æquationes, quarum radices, partim sunt positivæ, partim negativæ. Ut, si ponatur $x = 2$, sive $x - 2 = 0$, & $x = -5$, sive $x + 5 = 0$; multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, prodibit æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, cujus radices sunt 2, & -5. Atque ita pariter, si multiplicentur per se mutuo tres istæ æquationes $x - 3 = 0$, $x + 4 = 0$, $x + 5 = 0$; orietur æquatio $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$, cujus tres radices sunt 3, -4, -5.

403. Abunde ergo, liquet, æquationes, quarum plures sunt radices, constitui per multiplicationem æquationum simplicium, quæ radices illas continent. Id vero quum ita sit, perspicuum est quoque, æquationem omnem, quæ plures radices admittit, dividi semper posse per binomium, quod compositum sit, vel ex quantitate incognita, diminuta valore alicujus ex radicibus positivis; vel ex quantitate incognita, aucta valore alicujus ex radicibus negativis. Nam profecto id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione, necesse est, ut resolvatur.

404. Ita æquationis hujus $x^2 + 3x - 10 = 0$ duæ quidem sunt radices, quarum una 2 est positiva, altera -5 est negativa. Quare, pro ejus constitutione, necesse est, multiplicare

re

re $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$. Plane vero, ſicuti id, quod producitur, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, eſt æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$; ita eadem æquatio dividi poterit, tam per binomium $x - 2$, quam per binomium $x + 5$; quorum prius conſtat ex incognita, diminuta valore radicis poſitivæ; alterum ex eadem incognita, aucta valore radicis negativæ.

405. Hujus autem diviſionis ope, perſpicuum eſt, dimenſiones æquationis minui, ipſamque æquationem ad gradum inferiorem deprimi. Ita æquatio iſta $x^3 - 19x + 30 = 0$, cujus tres radices ſunt 2, 3, & -5, ſi dividatur per $x + 5$, hoc eſt per binomium, conſtans incognita, aucta valore radicis negativæ; orietur hæc alia $x^2 - 5x + 6 = 0$, ubi incognita duas tantum dimenſiones habet. Et, ſi rurſus hæc dividatur per $x - 3$, hoc eſt per binomium, conſtans incognita, multata valore unius ex radicibus poſitivis; prodibit æquatio ſimplex $x - 2 = 0$, in qua radix altera poſitiva continetur.

406. Jam, quemadmodum omnis æquatio art.403. dividi * poteſt per binomium, compoſitum, vel ex incognita, diminuta valore unius ex radicibus poſitivis, vel ex eadem incognita, aucta valore unius ex radicibus negativis; ita viciſſim, ſi æquatio aliqua dividi poſſit per binomium, conſtans ex incognita, aucta, vel diminuta quantitate altera cognita, indicio id nobis eſſe debet, hanc cognitam quantitatem eſſe unam ex radicibus æquationis; poſitivam quidem, ſi conjungatur cum incognita ſigno $-$; negativam vero, ſi ſigno $+$ cum ea conjuncta reperiatur.

407. Ut, ſi fuerit æquatio $x^3 - 6x^2 - 7x$

$+ 60$

$+ 60 = 0$, ea dividi poterit exacte, & absque ullo residuo, tam per $x - 4$, quam per $x - 5$; quandoquidem in primo casu oritur in quotiente hæc altera æquatio $x^2 - 2x - 15 = 0$, in secundo vero fit quotiens divisionis æquatio ista $x^2 - 1x - 12 = 0$. Quare concludendum est, numeros 4, & 5 esse radices positivas ejus æquationis. Et quoniam eadem æquatio dividi quoque potest per $x + 3$, quum oriatur in quotiente $x^2 - 9x + 20 = 0$; erit ejusdem æquationis radix negativa numerus $- 3$.

408. Vicissim vero, si æquatio aliqua dividi nequeat per binomium, compositum ex quantitate incognita, aucta, vel diminuta quantitate altera cognita; argumento id nobis esse debet, quantitatem hanc cognitam nullam esse ex suis radicibus. Ita eadem illa æquatio $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ dividi quidem potest per $x - 4$, $x - 5$, $x + 3$, sed nullo modo dividi potest per eandem incognitam x, auctam, vel diminutam quocumque alio numero: id, quod ostendit æquationem illam, præter radices 4, 5, & $- 3$, nullam aliam radicem admittere.

409. Atque hinc, ad cognoscendum, num aliqua quantitas sit radix alicujus æquationis, nec ne, non modo substitutione uti licebit, hoc est inquirendo *, num quantitas illa, substituta loco incognitæ in æquatione, conditiones ejus adimpleat, faciendo, ut æquationis termini omnes evanescant; verum etiam divisione, scilicet dividendo æquationem ipsam per binomium, compositum ex incognita, aucta, vel diminuta data illa quantitate. Nam, si divisio fiat absque ullo residuo, erit * data illa quantitas una ex ra-

* art. 376.
* art. 406

* art. 408. radicibus æquationis; secus vero *, si divisio exacte fieri nequeat.

410. Ceterum, ne ullum hic dubium maneat, demonstratione oportet fulciamus, quod, si utique æquatio aliqua dividi possit per binomium, compositum ex incognita, aucta, vel diminuta data aliqua quantitate; quantitas ista una ex radicibus æquationis esse debet; positiva quidem, ubi conjungitur cum incognita signo $-$; negativa vero, ubi cum eadem incognita signo $+$ conjuncta reperitur. Id enim ex ipsa, qua æquationes constituuntur, ratione non ita est manifestum. Nam, quemadmodum una, eademque quantitas multipliciter componi potest; ita suspicari aliquis posset, eandem illam summam terminorum æquationis multipliciter posse constitui.

411. Ostendi id igitur poterit in hunc modum. Assumatur æquatio quævis $x^2 + px + q = o$, quæ dividi possit exacte, & absque ullo residuo per $x - a$. Dico, fore $x - a = o$, atque adeo $x = a$. Dividatur enim quantitas $x^2 + px + q$ per $x - a$. Et quoniam in divisione, quæ fieri debet, ex hypothesi, absque ullo residuo, remanet $a^2 + pa + q$; erit $a^2 + pa + q = o$. Sed in hac æquatione, si loco incognitæ a substituatur x, fient termini ejus $x^2 + px + q$, quorum summa est æqualis nihilo. Itaque, quia in æquatione $a^2 + pa + q = o$ quantitas x adimplet conditiones ipsius a; erit $a = x$, atque adeo $x - a = o$.

IV.

IV. *Regula cognoscendi species radicum æquationis, quum omnes sunt reales.*

412. QUot radices admittat unaquæque æquatio; ex numero dimensionum ipsius cognosci posse, jam superius * indicavimus. Nam omnis æquatio tot radices habere potest, & non plures, quot sunt dimensiones, ad quas in ea ascendit incognita. Et, quamquam hujusmodi principium nulla fuerit ratione suffultum; attamen ex tradita æquationum constitutione, nempe, quod oriuntur per multiplicationem æquationum simplicium, quæ continent radices illas, facile nunc erit, illud ostendere. *art. 385.

413. Si enim fieri potest, habeat æquatio aliqua duarum dimensionum tres radices, quæ sint $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$. Itaque, si multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, producetur eadem æquatio, quæ utique oritur, multiplicando $x - a = 0$ per $x - c = 0$. Jam vero ex illa multiplicatione gignitur æquatio ista $x^2 - ax - bx + ab = 0$, ex ista profluit hæc altera $x^2 - ax - cx + ac = 0$. Itaque duæ istæ æquationes non different a se mutuo. Quare, conferendo terminos unius cum terminis alterius, habebuntur duæ aliæ æquationes $ax + bx = ax + cx$, & $ab = ac$; & propterea, quia ex ipsarum alterutra infertur $b = c$, liquet, tertiam radicem assumptam c eandem esse cum secunda b.

414. Neque dicas, fieri posse, ut una, eademque æquatio duarum dimensionum constitua-

tuatur per multiplicationem, tum duarum radicum $x - a = 0$, $x - b = 0$, cum aliarum duarum $x - c = 0$, $x - d = 0$. Nam, quum ex priore multiplicatione oriatur $x^2 - ax - bx + ab = 0$, & ex secunda $x^2 - cx - dx + cd = 0$, atque duæ istæ æquationes non differant a se invicem: comparatis terminis unius cum terminis alterius, habebitur $a + b = c + d$, & $ab = cd$. Unde facile erit, ostendere, posteriores duas radices c, & d easdem esse cum prioribus a, & b.

415. Quum enim sit $a + b = c + d$; quadratis partibus, erit $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$. Quumque habeatur quoque $ab = cd$, erit $4ab = 4cd$. Unde, demptis membris hujus æquationis ex membris illius, fiet etiam $a^2 - 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$; atque adeo, extracta hinc inde quadrata radice, erit $a - b = c - d$. Quum ergo sit, tam $a + b = c + d$, quam $a - b = c - d$; erit primo per additionem $2a = 2c$, sive $a = c$; & secundo erit per subtractionem $2b = 2d$, hoc est $b = d$. Unde radices secundæ c, & d eædem erunt cum primis a, & b.

416. Jam, quæ sit species radicum æquationis, quotiescumque sunt reales, & non imaginariæ, hoc est, quot ex iis radicibus sint positivæ, & quot negativæ; cognosci potest per hanc regulam. Nimirum in omni æquatione tot habentur radices positivæ, quot variationes reperiuntur signorum $+$, & $-$; totque negativæ, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa $+$, vel duo signa $-$, quæ se invicem excipiunt. Colligitur autem hujus regulæ veritas abunde

ex

ex ipsa, qua æquationes constituuntur, ratione.

417. Ut si constituenda esset æquatio, quæ duas habeat radices positivas 2, & 3; oporteret, multiplicare $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, & æquatio, inde orta, $x^2 - 5x + 6 = 0$ foret ea, quam quærimus. Plane vero in hac æquatione, post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, affectus signo $-$, quæ est una signorum variatio; & post terminum $5x$, affectum signo $-$, habetur terminus 6, affectus signo $+$, quæ est signorum variatio altera. Quare, propter duas radices positivas hujus æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, duæ item signorum variationes in ea reperiuntur.

418. Similiter, si constituere oporteret æquationem, quæ duas habeat radices negativas -2, -3; multiplicandum esset $x + 2 = 0$ per $x + 3 = 0$, & æquatio, quæ ex hac multiplicatione producitur, $x^2 + 5x + 6 = 0$ foret illa, de qua est quæstio. Quia vero in hac æquatione, post terminum x^2, affectum signo $+$, habetur terminus $5x$, similiter affectus signo $+$, post quem sequitur terminus 6, qui itidem afficitur signo $+$; perspicuum est, in æquatione ista, propter duas radices negativas, duas signorum similitudines reperiri.

419. Atque ita quoque, si constituenda esset æquatio, ubi incognita præter radicem positivam 2, aliam habeat negativam -5; multiplicare oporteret $x - 2 = 0$ per $x + 5 = 0$, & quæ inde producitur æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$ ea foret, de qua agitur. Jam in hac æquatione, post terminum x^2, affectum signo $+$, sequitur terminus $3x$, affectus signo $-$; post

quem habetur terminus 10, affectus item signo —. Quare, propter duas radices, unam positivam, alteram negativam, in eadem æquatione una adest signorum variatio, & una signorum similitudo.

420. Ad eundem itaque modum, si scire velim, quot sint radices positivæ, & quot negativæ in hac æquatione $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, ubi incognita ad quatuor dimensiones ascendit, & consequenter quatuor radices admittit; considero signa, quibus termini ipsius afficiuntur. Et quia in ea tres reperio signorum variationes, & unam signorum similitudinem; concludo, ex quatuor radicibus tres esse positivas, & unam negativam. Quod quipem perspicuum est. Nam radices quatuor illius æquationis sunt 2, 3, 4, & -5; quum quisque horum numerorum incognitæ x conditiones adimpleat.

421. Sed hic sedulo notandum est, regulam istam tunc demum sibi locum vindicare, quum radices omnes æquationis sunt reales; at ubi radices aliquæ fuerint imaginariæ, tunc regula minime nobis usui esse potest. Sic in æquatione $x^2 - 2x + 10 = 0$, ubi incognita x duas radices debet habere, dispositio signorum indicat, utramque illarum radicum esse positivam. Finge jam $x + 4 = 0$, & multiplica æquationem illam $x^2 - 2x + 10 = 0$ per $x + 4 = 0$, ut prioribus addatur una radix negativa. Jamque orietur hæc altera æquatio $x^3 + 2x^2 + 2x + 40 = 0$, quæ deberet habere duas radices positivas, & unam negativam; quum tamen, si signa consideres, quibus termini ipsius afficiuntur, omnes ejus

ejus radices negativæ reperiantur.

422. Fallit ergo in hoc casu regula, superius * tradita, Quod sane exinde evenit, quia *Art.416. radices duæ prioris æquationis $x^2 - 2x + 10 = 0$, non sunt reales, sed imaginariæ. Numeri enim, qui, scripti in æquatione locò incognitæ x, conditiones ejus adimplent, sunt $1 + \sqrt{-9}$, & $1 - \sqrt{-9}$: quorum utrumque, liquet, portionem imaginariam involvere. Unde generaliter, si addendo radicibus alicujus æquationis radices alias reales, æquatio nova non prodeat talis, qualem exigunt ejus radices, si omnes essent reales; licebit, tuto concludere, saltem nonnullas ex radicibus prioris æquationis imaginarias esse: & ea propter allata regula usui etiam nobis esse potest aliquo modo, pro inquirendo, num inter radices alicujus æquationis aliquæ lateant imaginariæ.

V. Applicatio ejusdem regulæ ad æquationes, in quibus deficit aliquis ex terminis intermediis.

423. Regula, mox * tradita, pro qualitate radicum indaganda, applicari etiam potest æquationibus, ubi aliquis ex terminis intermediis deficit: nimirum, si supponatur terminus ille deficiens, primo affectus signo +, deinde affectus signo −; & in utraque hypothesi, ope ejus regulæ, definiantur radices, quas cum termino illo deficiente ostendunt alii duo, hinc inde existentes. Quum enim perinde sit, sive terminum illum deficientem consideremus affectum signo +, sive signo −: si ex utraque hypothesi eædem radices eruantur, *Art.416.

certum eſt, radices illas tales eſſe, quales inveniuntur, ubi quidem æquationis radices omnes ſunt reales; quod ſi vero radices, quæ eruuntur ex utraque hypotheſi, non ſint eædem, tunc tuto concludere licebit, duas illas radices imaginarias eſſe.

424. Ut, ſi ſcire velim, cujus ſpecici ſint duæ radices, quas admittit æquatio duarum dimenſionum $x^2 - 9 = 0$, ubi ſecundus terminus deficit; ſuppono terminum illum deficientem, primo affectum ſigno $+$, deinde affectum ſigno $-$. Et quia in utraque hypotheſi una ex radicibus prodit poſitiva, altera negativa; concludo, æquationem $x^2 - 9 = 0$ unam habere radicem poſitivam, alteram negativam. Quod ſi vero proponatur æquatio $x^2 + 9 = 0$; prodibit utraque radicum poſitiva, ſupponendo terminum deficientem affectum ſigno $+$; & utraque negativa, ubi ponitur affectus ſigno $-$. Quare duæ ejus æquationis radices non erunt reales, ſed imaginariæ.

425. Similiter, ſi ſcire velim, cujus ſpeciei ſint duæ radices, quæ erui debent ex tribus prioribus terminis hujus æquationis $x^3 - 19x - 30 = 0$, ubi radices omnes ſunt reales; ſuppono primum terminum deficientem affectum ſigno $+$; eritque illarum radicum una negativa, & altera poſitiva. Quumque ejuſdem oriantur ſpeciei, ubi idem terminus deficiens ponitur affectus ſigno $-$; concludo, radices illas tales revera eſſe, atque adeo æquationem ipſam duas habere radices negativas, & unam poſitivam. Sed, ſi proponatur æquatio $x^3 + 4x - 16 = 0$; quia non eædem ſunt radices, quæ in utraque hy-

hypothesi ex tribus prioribus terminis eruuntur; concludendum est, duas illas radices, non quidem reales esse, sed imaginarias.

426. Atque ita quoque, si scire cupiam, cujus speciei sint duæ radices, quæ colligi debent ex tribus postremis terminis hujus æquationis $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua omnes radices sunt reales; considero prius terminum deficientem, velut affectum signo $+$; eritque illarum radicum una positiva, altera negativa. Et quoniam hujus etiam oriuntur speciei, ubi idem terminus deficiens ponitur affectus signo $-$; concludo, tales revera esse radices illas, ac proinde æquationem ipsam duas habere radices positivas, & unam negativam. Sed, si proponatur æquatio $x^3 - 3x^2 - 32 = 0$, quia non eædem sunt radices, quæ ex tribus postremis terminis in utraque hypothesi eruuntur; concludere fas erit, duas illas radices esse imaginarias, & non jam reales.

427. Ex quibus liquet, traditam * regulam, *art. 423. pro cognoscenda specie radicum, ubi deficit unus ex terminis intermediis, contrahi posse in hunc modum: nempe, ut ex duabus radicibus, quas termini hinc inde existentes, exhibere debent cum termino deficiente, una sit positiva, & altera negativa, quum contraria sunt signa illorum terminorum, & æquationis radices omnes sunt reales; at vero, ut utraque sit imaginaria, ubi earundem terminorum signa fuerint similia. Nam, profecto, quum contraria sunt signa terminorum, hinc inde a deficiente termino existentium; tunc in utraque hypothesi una ex radicibus prodibit positiva, & altera negativa. Sed, quum illorum terminorum signa sunt

ſimilia; eo caſu in una hypotheſi erunt ambæ poſitivæ, in altera ambæ negativæ.

428. Cæterum ſedulo hic notandum eſt, quod, etſi tuto concludere liceat, duas illas radices imaginarias eſſe, quum termini, hinc inde poſiti a termino deficiente, habent ſigna ſimilia; non hinc tamen viciſſim argumento nobis eſſe debet, eaſdem illas radices reales eſſe, ubi eorundem terminorum ſigna ſunt contraria. Ita æquationis hujus $x^2 - 4x + 6 = 0$ radices duæ ſunt imaginariæ, quum ſint $2 + \sqrt{-2}$, & $2 - \sqrt{-2}$. Verum, multiplicata ea per $x + 4 = 0$, oritur nova æquatio $x^3 - 10x + 24 = 0$, in qua termini, hinc inde exiſtentes a termino deficiente, contraria ſigna habere reperiuntur. Itaque, ut concludi poſſit, ex duabus iis radicibus unam eſſe poſitivam, alteram negativam, haud quidem ſatis eſt, ſigna terminorum, inter quos deficiens terminus reperitur, eſſe contraria, ſed neceſſe eſt quoque, ut æquationis radices omnes ſint reales.

429. Quomodo autem generaliter cognoſci poſſit, num inter radices æquationis dati gradus aliquæ adſint imaginariæ, & quot eæ ſint numero; id ſane non eſt adeo facile explicatu, nec commode tradi poteſt, niſi prius circa coefficientes terminorum æquationis proprietates quædam oſtendantur. De perquiſitione igitur radicum imaginariarum, in æquationibus exiſtentium, agendum nobis erit, ubi oſtenſæ fuerint proprietates illæ, quæ coefficientibus terminorum æquationis competunt. Sed nihil interim vetat, circa radices imaginarias æquationum ea hic proferre, quæ & faciliora ſunt, & ex poſitis hac-

ſte-

ctenus principiis nullo quidem negotio deducuntur.

VI. *Nonnulla circa radices imaginarias aequationum ostenduntur.*

430. PRimum, quod circa radices imaginarias notatu dignum existimo, est, quod numerus ipsarum numquam impar esse potest: adeo nempe, ut in omni æquatione, quæ existat in sua propria sede, nonnisi duæ, quatuor, sex radices imaginariæ possint occurrere. Id in exemplo, superius * allato, de recta, quæ ducitur æquidistanter diametro circuli ad datum intervallum, abunde liquet. Nam radices duæ, quæ determinant duo puncta sectionis, sunt ambæ reales, & inæquales, quum datum intervallum est minus semidiametro circuli; fiunt vero æquales, quum idem intervallum est æquale semidiametro; ac denique ambæ evadunt imaginariæ, ubi intervallum eadem semidiametro est majus. Sed generalem, oportet, hujus rei demonstrationem afferamus. *art. 384.

431. Nimirum, quia æquatio supponitur existens in sua propia sede, in ea sicuti nulla erit * quantitas realis radicalis, ita nulla erit quantitas imaginaria. Itaque radices ipsius æquationis ejusmodi esse debent, ut, quum eæ, ad constituendam æquationem, multiplicantur per se mutuo, evanescat incommensurabilitas, evanescat contradictio radicum. Plane vero, ubi quantitates, quæ per se invicem multiplicantur, sunt imaginariæ, ipsarum contradictio nequit evanescere, nisi earundem numerus fuerit par. *art. 324.

*lib. 1. art. 376. Nam vidimus supra *, nonnisi duas quantitates imaginarias, per se mutuo multiplicatas, producere quantitatem realem; & omnem quanti- *lib. 1. art. 379. tatem imaginariam, ductam in aliam realem, producere * quantitatem alteram, similiter imaginariam. Quare in omni æquatione numerus radicum imaginariarum par semper esse debet.

432. Ex eo autem, quod radices imaginariæ occurrunt in æquationibus semper in numero pari; perspicuum est, æquationes illas, quæ sunt tertii, quinti, septimi, aut alterius cujuscumque imparis gradus, unam ad minimam radicem realem habere; nec proinde omnino impossibilia esse posse problemata, ad quæ illiusmodi æquationes referuntur; quum iis fieri possit satis, saltem per radicem illam realem, quam tales æquationes admittunt. Sed non perinde se res habet de iis æquationibus, quæ ad secundum, quartum, sextum, aut alium quemcumque parem gradum ascendunt. Nam nihil obstat, quominus in iis omnes radices sint imaginariæ; & consequenter, ut plane impossibilia sint ea problemata, quæ ad hujusmodi æquationes reducuntur.

433. Secundo radices imaginariæ æquationum possunt esse, vel puræ, vel mixtæ. Dicuntur puræ, quum nonnisi quantitates imaginarias continent. Vocantur vero mixtæ, cum ex realibus, & imaginariis simul coalescunt. Ita æquationis hujus $x^2 + 3 = 0$ radices duæ sunt imaginariæ; sed earum utraque est pura, quum una sit $+\sqrt{-3}$, altera $-\sqrt{-3}$. Duæ autem radices alterius hujus æquationis $x^2 - 4x + 6 = 0$ sunt quidem imaginariæ; sed ambæ sunt mi-

mixtæ. Nam, si transferatur ad alteram partem æquationis ultimus terminus, & utrique parti addatur quadratum ex quantitate cognita secundi termini dimidiata; extrahendo hinc inde quadratam radicem, invenietur, tum $x = 2 + \sqrt{-2}$, cum $x = 2 - \sqrt{-2}$.

434. Quemadmodum autem ex duabus radicibus alicujus æquationis, nequit una esse realis, & altera imaginaria, sed debent, vel ambæ esse reales, vel ambæ imaginariæ; ita quoque ex duabus alicujus æquationis radicibus imaginariis nequit esse una pura, & altera mixta, sed debent, vel ambæ esse puræ, vel ambæ mixtæ; quum aliter contradictio non evanesceret. Quin etiam, sicuti, quum utraque radicum imaginariarum est pura, ad tollendam contradictionem, necesse est, ut communis utrique radici sit quantitas imaginaria; ita quoque, quum ambæ radices sunt mixtæ, non aliter evanescet contradictio, quam si communis sit utrique radici, tum quantitas imaginaria, cum quantitas realis.

335. Sed, sive radices duæ imaginariæ alicujus æquationis sint puræ, sive mixtæ, semper quantitas ipsa imaginaria, communis utrique radici, contrariis signis in iis, oportet, reperiatur. Quod exinde quoque erui debet, quia, si idem in illis signum haberet, contradictio non evanesceret, ubi radices illæ, ad constituendam æquationem, multiplicantur per se mutuo. Et, ob eandem rationem, si radices imaginariæ fuerint mixtæ; quantitas realis, utrique radici communis, debet eodem signo in iis reperiri. Ita, si multiplicentur per se mutuo duæ istæ æquationes simplices $x - 2 + \sqrt{-3} = 0$, $x - 2$

$- \sqrt{}$

$-\sqrt{-3}=0$, in ea, quæ producitur, evanescet quidem contradictio; pariterque evanescent, si æquationes simplices, quæ in se invicem ducuntur, fuerint $x+2-\sqrt{-3}=0$, $x+2+\sqrt{-3}=0$. Sed quocumque alio modo assumantur æquationes simplices, numquam sane fieri poterit, ut per earum multiplicationem contradictio evanescat.

436. Atque hinc modo sequitur tertio, æquationes secundi gradus, cujus duæ radices sunt imaginariæ, ultimum terminum oportere esse affectum signo $+$. Nam æquationes simplices, quæ per mutuam ipsarum multiplicationem constituere possunt æquationem secundi gradus, duabus radicibus imaginariis præditam, debent esse; vel hujus formæ $x-a+\sqrt{-b^2}=0$, $x-a-\sqrt{-b^2}=0$; vel etiam alterius istius $x+a+\sqrt{-b^2}=0$, $x+a-\sqrt{-b^2}=0$. Plane vero in utroque casu, quæ producitur æquatio habebit ultimum terminum affectum signo $+$. Nam, quum fuerint prioris formæ, orietur æquatio $x^2-2ax+a^2+b^2=0$; ubi vero fuerint formæ posterioris, producetur æquatio $x^2+2ax+a^2+b^2=0$. Idemque obtinet quoque, si radices imaginariæ fuerint puræ; quandoquidem, si multiplicetur $x-\sqrt{-b^2}=0$ per $x+\sqrt{-b^2}=0$, prodibit æquatio $x^2+b^2=0$.

437. Etsi autem in æquationibus secundi gradus, ubi ultimus terminus reperitur affectus signo $-$, radices duæ nequeant esse imaginariæ; non hinc tamen per contrarium putandum est, eas esse semper imaginarias, quum afficitur signo $+$. Nam id dumtaxat obtinet, quotiescumque

que ultimus terminus reperitur quidem affectus signo $+$, sed est major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato; ut cernere licet in utraque istarum æquationum $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = 0$, in quibus radices duæ sunt imaginariæ. Nam ultimus terminus $+ a^2 + b^2$ non modo afficitur signo $+$, verum etiam major est, quam a^2, quadratum coefficientis secundi termini dimidiati.

438. Interim radices æquationis secundi gradus, in qua deficit secundus terminus, & ultimus afficitur signo $+$, erunt semper imaginariæ. Id abunde sequitur ex eo, quod termini, hinc inde existentes a termino deficiente, similibus signis sunt affecti *. Sed idem colligi *art. 427. quoque potest ex regula, mox * tradita. Jam *art. 437. enim vidimus, radices duas æquationis secundi gradus imaginarias esse, quum ultimus terminus afficitur signo $+$, & est major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Unde, quia, quum deficit secundus terminus, hujusmodi quadratum est etiam nullum, adeoque ultimus terminus ipso semper est major: plane necesse est, ut sint imaginariæ radices duæ æquationis secundi gradus, in qua deest secundus terminus, & ultimus afficitur signo $+$.

CA-

CAPUT III.

Coefficientium terminorum æquationis proprietates singulares.

* art. 345. 439. DIximus supra *, quantitates cognitas, quæ in singulis æquationum terminis reperiuntur, vocari communiter coefficientes eorum terminorum; & notavimus ibidem, quod in omni æquatione legitime reducta, ac ordinata, sicuti coefficiens primi termini est semper unitas, ita coefficiens ultimi termini est ipse terminus ultimus. Jam his terminorum coefficientibus competunt proprietates quædam, plane singulares. Et quoniam eæ maximi sunt usus in sequentibus; visum est, illas omnes seorsim hoc capite comprehendere.

I. Constitutio coefficientium terminorum cujusque æquationis.

440. COefficientibus terminorum cujuscumque æquationis hæc quidem accidunt: nempe, ut coefficiens secundi termini exhibeat summam radicum ipsius æquationis sub signo contrario; coefficiens termini tertii summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; coefficiens termini quarti summam productorum ex singulis ternis sub signo mutato; coefficiens termini quinti summam productorum ex singulis quaternis sub signo proprio; atque ita in infinitum: adeo, ut ipse

ul-

ultimus terminus dabit productum ex radicibus omnibus; sub signo contrario, si existat in loco pari; & sub signo proprio, si in loco impari reperiatur.

441. Possunt autem hæc omnia ostendi, mediante ipsa, qua æquationes constituuntur, ratione. Assumamus etenim simplices istas æquationes $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, & $x = -5$; vel, quod perinde est, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, & $x + 5 = 0$. Jam, multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$, producitur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices duæ sunt 2, & 3. Plane vero in hac æquatione clare liquet, coefficientem quidem secundi termini -5 exhibere nobis summam radicum $2 + 3$ sub signo contrario; ipsum autem ultimum terminum $+6$ exhibere productum earundem radicum sub signo proprio.

442. Quod si æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ multiplicetur per $x - 4 = 0$, prodibit hæc altera æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus tres radices sunt 2, 3, 4. Atque hic quoque liquido patet, coefficientem secundi termini -9 exhibere summam radicum $2 + 3 + 4$ sub signo contrario; coefficientem termini tertii $+26$ exhibere summam productorum ex singulis binis $6 + 8 + 12$ sub signo proprio, & ultimum terminum -24 præbere id, quod ex radicum omnium multiplicatione producitur, sub signo mutato.

443. Sed si æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ multiplicetur adhuc per $x + 5 = 0$; tunc orietur hæc alia æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices quatuor

tuor sunt 2, 3, 4, & $-$ 5. Ubi etiam manifestum est, coefficientem secundi termini $-$ 4 esse summam radicum omnium 2 + 3 + 4 $-$ 5 sub signo contrario; coefficientem termini tertii $-$ 19 esse summam productorum ex singulis binis 6 + 8 $-$ 10 + 12 $-$ 15 $-$ 20 sub signo proprio; coefficientem termini quarti + 106 esse summam productorum ex singulis ternis 24 $-$ 30 $-$ 40 $-$ 60 sub signo mutato; & ipsum ultimum terminum $-$ 120 esse productum, quod oritur ex multiplicatione radicum omnium, sub signo proprio.

444. Hoc idem clarius patebit, si radices æquationum Alphabeti litteris designemus; quia hac ratione quantitates, quæ oriuntur sub signis contrariis, sese mutuo non destruunt, sed manent in ipsis æquationibus. Itaque, si multiplicetur $x - a = 0$ per $x - b = 0$, orietur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus radices duæ sunt a, & b. Sed evidens est, in hac æquatione coefficientem secundi termini $-a-b$ esse summam radicum a, & b sub signo mutato; ipsum vero ultimum terminum $+ab$ esse id, quod producitur ex multiplicatione earundem radicum, sub signo proprio.

445. Quod si æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$ multiplicetur per $x - c = 0$, orietur hæc alia $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0$, cujus radices sunt a, b, & c. Atque hic quoque perspicuum est, coefficientem secundi termini $-a-b-c$ esse summam radicum sub signo mutato; coefficientem termini tertii $+ab+ac+bc$ esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; & ulti-

timum terminum $-abc$ esse id, quod ex multiplicatione radicum omnium generatur, sub signo contrario.

446. Et si æquatio $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0$ multiplicetur adhuc per $x + d = 0$, prodibit hæc altera $x^4 - ax^3 - bx^3 - cx^3 + dx^3 + abx^2 + acx^2 + bcx^2 - adx^2 - bdx^2 - cdx^2 - abcx + abdx + acdx + bcdx - abcd = 0$. Ubi pariter manifestum est, coefficientem secundi termini $-a - b - c + d$ esse summam radicum omnium sub signo contrario; coefficientem tertii termini $+ab + ac + bc - ad - bd - cd$ esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; coefficientem quarti termini $-abc + abd + acd + bcd$ esse summam productorum ex singulis ternis sub signo mutato; ac denique ultimum terminum $-abcd$ esse productum, quod oritur ex multiplicatione radicum omnium, sub signo proprio.

447. Jam, quum in secundo termino cujuscumque æquationis existat summa radicum, omnino necesse est, ut, deficiente ex aliqua æquatione secundo termino, summa radicum positivarum adæquet summam ex radicibus negativis. Neque enim aliter abire potest ex æquatione terminus secundus, nisi evanescente ejus coefficiente. Plane vero iste evanescet, ubi partes, ex quibus componitur, contrarietate signorum, se mutuo destruunt. Ita in postrema æquatione $x^4 - ax^3 - bx^3 - cx^3 + dx^3 + abx^2 + acx^2 + bcx^2 - adx^2 - bdx^2 - cdx^2 - abcx + abdx + acdx + bcdx - abcd = 0$, evanescet secundus terminus, si fuerit $a + b + c = d$; hoc est,

si ra-

si radices tres positivæ simul æquales fuerint radici negativæ.

448. Sicuti autem defectus secundi termini indicat radices positivas, & negativas se mutuo destruere; ita indicio nobis esse debet, se invicem destruere producta ex singulis binis, quum deficit terminus tertius; producta ex singulis ternis, quum deficit terminus quartus; atque ita deinceps. Nam generaliter deficit in æquatione terminus aliquis, ubi fit nihilo æqualis ejus
*Art. 440. coefficiens. Atqui jam nobis innotuit *, coefficientem tertii termini esse summam productorum ex singulis binis; coefficientem termini quarti esse summam productorum ex singulis ternis; atque ita de aliis.

449. Cæterum, quum cognitis radicibus alicujus æquationis, illico haberi possint coefficientes suorum terminorum; licebit hinc, constituere æquationes multo facilius, absque multiplicatione æquationum simplicium, quæ continent radices illas. Ita, si æquationis tertii gradus radices sint 2, 3, & 4; liquido patet, esse -9 summam earum sub signo mutato, $+26$ summam productorum ex singulis binis sub signo proprio, & -24 productum, quod oritur ex mutua omnium multiplicatione, sub signo contrario. Unde, quum esse debeat -9 coefficiens secundi termini, $+26$ coefficiens termini tertii, & -24 coefficiens ultimi termini, sive potius ipse terminus ultimus; fiet æquatio quæsita $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

II.

II. *Quomodo problemata æquationum constitutiva concipi possint.*

450. INter eos, qui Elementa Algebræ scripserunt, conati sunt nonnulli, problemata æquationum constitutiva, ex quorum nempe resolutione æquationes illæ orirentur, determinare. Sano equidem consilio, ne crederent Tirones, æquationes, ad libitum sumptas, fictitias esse, & ad nullum problema posse referri. Verum docuerunt per ambages id, quod unica, ac simplicissima via, quæ ex ipsa terminorum æquationis constitutione * derivatur, tradi potest. Satis enim erat, sic rem concipere, ut, pro unaquaque æquatione, inveniendæ essent tot quantitates, quot sunt dimensiones ejus, sed ita tamen, ut data sit, tum summa ipsarum, tum summa productorum, & ex singulis binis, & ex singulis ternis, &c. * art. 440.

451. Ut, si fuerit æquatio $x^2 - ax + b^2 = 0$, problema ejus constitutivum hoc erit: invenire duas magnitudines, quarum summa quidem sit a, productum vero b^2. Et similiter, si habeatur æquatio $x^3 - ax^2 - abx + abc = 0$, problema ejus constitutivum in hunc modum concipi poterit: invenire tres magnitudines, ita, ut a sit summa ipsarum, $-ab$ summa productorum ex singulis binis, & $-abc$ id, quod ex omnium multiplicatione producitur. Atque ita quoque, si proponatur æquatio $x^4 + ax^3 - abx^2 - abcx + abcd = 0$, poterit problema ejus constitutivum hoc pacto concipi: invenire quatuor magnitudines, ita, ut $-a$ sit summa ipsarum, $-ab$

 sum-

summa productorum ex singulis binis, $+abc$ summa productorum ex singulis ternis, & $+abcd$ productum ex omnibus.

452. Nec pigebit ostendere, solutione horum problematum æquationes illas oriri. Quantum enim ad primum, in quo duas oportet magnitudines invenire, quarum summa sit a, productum vero b^2; sint x, & y magnitudines inveniendæ. Fiet ergo, tum $x+y=a$, cum $xy=b^2$. Unde, quum habeatur, & $y=a-x$, & $y=b^2:x$; erit $b^2:x=a-x$, atque adeo $x^2-ax+b^2=0$. Sive etiam vocetur x magnitudo una. Et, ob priorem problematis conditionem, fiet $a-x$ magnitudo altera. Quare productum ex iis erit $ax-x^2$: quod quum esse debeat b^2, habebitur $b^2=ax-x^2$, sive $x^2-ax+b^2=0$.

453. Quantum ad secundum, in quo inveniendæ sunt tres magnitudines, quarum summa sit a, productum ex singulis binis $-ab$, & productum ex omnibus $-abc$; vocetur similiter x magnitudo una. Et, ob priorem problematis conditionem, fiet $a-x$ summa duarum reliquarum; atque adeo erit $ax-x^2$ summa productorum ex prima in reliquas duas, seorsim sumptas. Est autem $-ab$ summa productorum ex singulis binis. Itaque erit $-ab-ax+x^2$ productum ex duabus reliquis; & consequenter $-abx-ax^2+x^3$ productum ex tribus omnibus: quod quum esse debeat $-abc$, fiet $-abx-ax^2+x^3=-abc$, hoc est $x^3-ax^2-abx+abc=0$.

454. Quantum ad tertium, in quo inveniri debent magnitudines quatuor, quarum summa

ma sit $-a$, productum ex singulis binis $-ab$, productum ex singulis ternis $+abc$, & productum ex omnibus $+abcd$; vocetur adhuc x magnitudo una. Et, ob primam problematis conditionem, fiet $-a-x$ summa trium reliquarum; atque adeo erit $-ax-x^2$ summa productorum ex prima in tres reliquas, seorsim sumptas. Est vero $-ab$ summa productorum ex singulis binis. Itaque erit $-ab+ax+x^2$ summa productorum ex tribus reliquis, binatim acceptis; & consequenter $-abx+ax^2+x^3$ summa productorum ex singulis illis binis in primam. Unde, quum, ob tertiam problematis conditionem, fiat $+abc+abx-ax^2-x^3$ productum ex tribus reliquis; erit $+abcx+abx^2-ax^3-x^4$ productum ex omnibus quatuor: quod quum esse debeat $+abcd$, habebitur æquatio $+abcx+abx^2-ax^3-x^4=+abcd$, hoc est $x^4+ax^3-abx^2-abcx+abcd=0$.

455. Eadem autem ratione concipi possunt problemata constitutiva æquationum, in quibus unus, vel plures ex terminis intermediis desunt. Ut, si fuerit æquatio $x^3-abx+a^2b=0$, problema constitutivum hoc erit; invenire tres magnitudines, ita, ut summa ipsarum sit zero, summa productorum ex singulis binis sit $-ab$, & productum ex omnibus sit $-a^2b$. Pariterque, si habeatur æquatio $x^4-abx^2-a^2b^2=0$, problema constitutivum tale erit: invenire quatuor magnitudines, ita, ut sit zero, tam summa ipsarum, quam summa productorum ex singulis ternis, sed, ut sit $-ab$ summa productorum ex singulis binis, & $-a^2b^2$ productum ex omnibus.

456. Et sane, quantum ad primum horum problematum, si vocetur x magnitudo una, fiet $-x$ summa duarum reliquarum: proindeque erit $-x^2$ summa productorum ex prima in reliquas duas, seorsim sumptas. Est autem $-ab$ summa productorum ex singulis binis. Quare erit $-ab+x^2$ productum ex duabus reliquis; & consequenter erit $-abx+x^3$ productum ex tribus omnibus. Unde, quia productum istud debet esse $-a^2b$, habebitur æquatio $-abx+x^3=-a^2b$, sive $x^3-abx+a^2b=0$, quæ est illa eadem, quam ex solutione hujus problematis diximus * derivari.

* art. 455.

457. Quantum vero ad alterum problema, vocetur rursus x magnitudo una; jamque fiet $-x$ summa trium reliquarum, & $-x^2$ summa productorum ex prima in tres reliquas, seorsim sumptas. Hinc porro erit $-ab+x^2$ summa productorum ex tribus reliquis, binatim acceptis, & $-abx+x^3$ summa productorum ex singulis illis binis in primam. Jam vero productum ex singulis ternis esse debet zero. Quare erit $+abx-x^3$ productum ex tribus reliquis; atque adeo fiet $+abx^2-x^4$ productum ex omnibus quatuor. Unde, quia productum istud esse debet $-a^2b^2$; orietur æquatio $+abx^2-x^4=-a^2b^2$, sive etiam $x^4-abx^2-a^2b^2=0$, quæ plane convenit cum illa, quam ex problematis hujus solutione profluere * diximus.

* art. 455.

458. Patet igitur, nullam pro lubitu fingi posse æquationem, cui problema aliquod, unde ea erui possit, non correspondeat. Sed, in hunc modum problemata æquationum constitutiva

con-

concipiendo, liquido etiam patebit, unamquamque æquationem tot radices admittere, quot gradus ejus ostendit. Nam in cujusque æquationis problemate constitutivo tot semper * magnitudines debent reperiri, quot sunt dimensiones ipsius æquationis. Plane vero, quæcumque ex iis magnitudinibus assumatur, velut incognita, semper in eandem illam æquationem incidimus. Itaque æquationis incognita singulas illas magnitudines indifferenter exhibebit: & propterea tot radicibus erit explicabilis, quot indicat gradus æquationis. * art. 450.

III. Qua ratione in æquationibus radices positivæ in negativas, & vicissim, verti queunt.

459. Quemadmodum ex tradita * constitutione coefficientium, quibus termini cujusque æquationis afficiuntur, universalis, ac expedita nobis sese obtulit * ratio determinandi problemata æquationum constitutivas; ita exinde derivare etiam licebit methodum efficiendi, ut in una eademque æquatione radices omnes, quæ negativæ erant, evadant positivæ, & ut eadem opera omnes illæ, quæ positivæ erant, negativæ reddantur: nimirum, mutando signa omnia, quæ in secundo, quarto, sexto, aliisque terminis reperiuntur; qui per numeros pares designantur, reliquis primi, tertii, quinti, similiumque terminorum, qui designantur per numeros impares, non mutatis. * art. 440. * art. 450.

460. Proponatur æquatio trium dimensionum $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Tres hujus radices sunt omnes positivæ; nam quilibet ho-

rum numerorum 2, 3, 4, scriptus in æquatione loco incognitæ x, ejus conditiones adimplet. Plane vero, mutatis signis secundo, & quarto termino, eadem evadit $x^3 + 9x^2 + 26x + 24 = 0$, & hujus radices sunt omnes negativæ; nam non alii numeri, substituti loco incognitæ x, reddunt terminos ejus nihilo æquales, quam $-2, -3, -4$. Quare, per mutationem eorum signorum, radices, quæ antea positivæ erant, evadunt negativæ.

461. Proponatur similiter æquatio quatuor dimensionum $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. In hac incognita x tres habet radices positivas 2, 3, 4, & unam negativam -5. Verum, ubi terminis secundo, & quarto signa mutantur, habetur loco ejus hæc alia æquatio $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, quæ tres habet radices negativas $-2, -3, -4$, & unam positivam 5. Itaque, eorum signorum mutatione, tres radices 2, 3, 4, quæ antea erant positivæ, evadunt negativæ; & vicissim radix -5, quæ prius erat negativa, versa est in positivam.

462. Ad eundem itaque modum, si habeatur æquatio $x^5 - ax^4 - abx^3 - a^2cx^2 + b^2d^2x - a^2b^3 = 0$; dispositio signorum, quibus termini ejus afficiuntur, indicat nobis, eam tres habere radices positivas, & duas negativas. Mutatis autem signis secundo, quarto, & sexto termino, vice ejus prodibit hæc alia $x^5 + ax^4 - abx^3 + a^2cx^2 + b^2d^2x + a^2b^3 = 0$, ubi, eadem signorum dispositio ostendit, duas adesse radices positivas, & tres negativas. Sed, mutationem subinde factam esse, putandum est, uti

quæ

quæ prius erant positivæ, evaserint negativæ; & vicissim, quæ antea negativæ erant, in positivas versæ fuerint.

463. Quod autem hæc regula suam originem trahit ex ipsa, qua coefficientes terminorum cujusque æquationis constituuntur, ratione; haud difficile erit ostendere. Ob regulas namque signorum, quæ in multiplicatione quantitatum locum habent, illud utique certum est, mutatis signis quantitatibus, quæ invicem multiplicantur, productum oriri eodem signo, ubi earum multitudo fuerit par; oriri vero signo contrario, ubi eadem multitudo fuerit impar.

464. Ita, si $+a$ per $+b$ multiplicetur, productum erit $+ab$; & similiter erit $+ab$, si mutatis signis quantitatibus, quæ invicem ducuntur, multiplicetur $-a$ per $-b$. Atque ita quoque, si $+a$ per $-b$ multiplicetur, productum erit $-ab$; pariterque erit $-ab$, si quantitatibus, quæ in se mutuo ducuntur, contrariis signis affectis, multiplicetur $-a$ per $+b$. Sed non perinde res est, si multitudo quantitatum, quæ per se mutuo multiplicantur, fuerit impar.

465. Plane enim, ubi invicem ducuntur quantitates $+a$, $+b$, $+c$, productum est $+abc$; ubi vero ducuntur in se mutuo quantitates $-a$, $-b$, $-c$, productum fiet $-abc$. Similiter, ductis invicem quantitatibus $+a$, $+b$, $-c$, productum est $-abc$; sed, si ducantur in se mùtuo quantitates $-a$, $-b$, $+c$, productum erit $+abc$. Atque ita demum, si multiplicentur per se mutuo quantitates $+a$, $-b$, $-c$, productum est $+abc$; sed, multi-

plicatis invicem quantitatibus $-a$, $+b$, $+c$, productum orietur $-abc$.

466. Id ergo quum ita ſit, perſpicuum eſt, mutatis ſignis radicibus omnibus alicujus æquationis, oriri ſigno mutato, non modo ſummam ipſarum, verum etiam ſummas productorum, quæ ex iis, impari numero ſumptis, generantur; oriri vero eodem ſigno ſummas eorum productorum, quæ ex iiſdem radicibus, pari numero acceptis, gignuntur. Unde veritas ejus, de quo agitur, ſatis ſuperque perſpecta evadit, ac explorata.

467. Jam enim coefficientes terminorum æquationis, in locis paribus exiſtentium, conti-
*art. 446. nent *, ſive ſummam radicum, ſive ſummam productorum, quæ ex iis, impari numero ſumptis, generantur; coefficientes vero terminorum, exiſtentium in locis imparibus, complectuntur ſummas productorum, quæ ex iiſdem radicibus, pari numero acceptis, gignuntur. Quare, ubi in radicibus ſignorum ſit permutatio, ii quidem contrariis ſignis, iſti vero ſignis iiſdem oriri debent affecti.

468. Ut vero rem oculis ſubjiciamus, ſunto $+a$, $+b$, $-c$, $-d$ radices quatuor alicujus æquationis, quæ ad quartum gradum aſcendit. Et quoniam ſumma radicum ſub ſigno mutato eſt $-a-b+c+d$, ſumma productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio eſt $+ab-ac-ad-bc-bd+cd$, ſumma productorum ex ſingulis ternis ſub ſigno contrario eſt $+abc+abd-acd-bcd$, & productum ex omni-
*art. 449. bus ſub ſigno proprio eſt $+abcd$; erit * $x^4-(a-b+c+d)x^3+(ab-ac-ad-bc-bd$

$- bd + cd) x^2 + (abc + abd - acd - bcd) x + abcd = 0$ æquatio, de qua agitur.

469. Mutentur modo ſigna iis radicibus, ita, ut fiant $-a$, $-b$, $+c$, $+d$. Jamque ſumma earum ſub ſigno contrario erit $+a+b-c-d$, ſumma productorum ex ſingulis binis ſub ſigno proprio erit $+ab-ac-ad-bc-bd+cd$, ſumma productorum ex ſingulis ternis ſub ſigno mutato erit $-abc-abd+acd+bcd$, & productum ex omnibus ſub ſigno proprio erit $+abcd$. Quare æquatio quarti gradus, cujus radices quatuor ſint $-a$, $-b$, $+c$, $+d$, erit * *art.449.
$x^4 + (a+b-c-d) x^3 + (ab-ac-ad-bc-bd+cd) x^2 - (abc-abd+acd+bcd) x + abcd = 0$.

470. Jam, ſicuti abunde liquet, æquationem iſtam non in alio a præcedente * differre, *art.468.
quam per ſigna, quæ in ſecundo, & quarto termino mutata reperiuntur; ita liquido etiam conſtat, hanc ſignorum mutationem in terminis illis, non aliunde repeti debere, quam quia, ubi mutantur ſigna quantitatibus, quæ in ſe invicem ducuntur, oritur quidem ſigno mutato ſumma productorum, quæ fiunt ex iis, impari numero ſumptis; ſed non item ſumma productorum, quæ fiunt ex iiſdem quantitatibus, acceptis numero pari.

IV. Ratio determinandi ſummas poteſtatum, quæ fiunt ex radicibus æquationis.

471. Ex tradita * ratione, qua coefficien- *art.440.
tes terminorum cujuſcumque æquationis conſtituuntur, perſpicuum eſt, quod

in

in omni æquatione, etsi radices ejus adhuc nos lateant, est tamen nobis perspecta, ac explorata, tum summa ipsarum, cum summa productorum, sive ex singulis binis, sive ex singulis ternis, sive ex singulis aliis earundem combinationibus; sed quæ sit summa quadratorum, cuborum, aliarumve altioris ordinis potestatum, quæ fiunt ex iisdem radicibus, facile quoque erit definire.

472. Nimirum, referant p, q, r, s, &c. coefficientes terminorum datæ æquationis sub signis mutatis, hoc est p coefficientem secundi termini, q coefficientem tertii, r coefficientem quarti, s coefficientem quinti, atque ita deinceps. Et, signis probe observatis, fiat $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, atque ita in infinitum. Qua ratione, sub signis propriis, erit a summa radicum, sive primarum potestatum; b summa quadratorum, sive secundarum potestatum; c summa cuborum; d summa quadrato-quadratorum; atque ita de reliquis.

473. Ut, si habeatur æquatio secundi gradus $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices duæ sunt 2, & 3; erit in ea 5 summa radicum, 13 summa quadratorum, 35 summa cuborum, 97 summa quadrato-quadratorum, atque ita deinceps. Plane vero, quum fiat $p = 5$, $q = -6$, & omnes alii coefficientes evanescant; erit $a = p = 5$, $b = pa + 2q = 25 - 12 = 13$, $c = pb + qa + 3r = 65 - 30 = 35$, $d = pc + qb + ra + 4s = 175 - 78 = 97$, &c.: proindeque summæ potestatum, quæ fiunt ex radicibus propositæ æquationis, tales inveniuntur, quales omnino esse debent.

474. Similiter, si habeatur æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$, cujus radices duæ sunt $+5$, & -2; erit in ea 3 summa radicum, 29 summa quadratorum, 117 summa cuborum, 641 summa quadrato-quadratorum, atque ita de aliis. Quum autem in hoc casu fiat $p = 3$, $q = 10$, & omnes alii coefficientes evanescant; erit $a = p = 3$, $b = pa + 2q = 9 + 20 = 29$, $c = pb + qa + 3r = 87 + 30 = 117$, $d = pc + qb + ra + 4s = 351 + 290 = 641$, &c. Quare summæ potestatum, quæ fiunt ex radicibus alterius hujus æquationis, tales etiam oriuntur, quales eas esse necesse est.

475. Proponatur ulterius æquatio $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, cujus tres radices sunt $+2$, $+3$, & -2. Plane in ista summa radicum est 3, summa quadratorum est 17, summa cuborum est 27, summa quadrato-quadratorum est 113, atque ita deinceps. Quum vero fiat $p = 3$, $q = 4$, $r = -12$, & omnes alii coefficientes evanescant; erit summa radicum $a = p = 3$, summa quadratorum $b = pa + 2q = 9 + 8 = 17$, summa cuborum $c = pb + qa + 3r = 51 + 12 - 36 = 27$, summa quadrato-quadratorum $d = pc + qb + ra + 4s = 81 + 68 - 36 = 113$, atque ita de aliis.

476. Sit etiam æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$. In ista fit $p = 4$, $q = 19$, $r = -106$, & $s = 120$. Unde, quum sit $a = p = 4$, $b = pa + 2q = 16 + 38 = 54$, $c = pb + qa + 3r = 216 + 76 - 318 = -26$, & $d = pc + qb + ra + 4s = -104 + 1026 - 424 + 480 = 978$; erit 4 summa radicum, 54 summa quadratorum, -26 summa cuborum, & 978 sum-

ſumma quadrato-quadratorum. Quod quidem perſpicuum eſt. Sunt enim radices illius æquationis 2, 3, 4, & -5, qui, ſicuti ſimul dant 4, ita dabunt 54 evecti ad quadratum, -26 evecti ad cubum, & 978 evecti ad quadrato-quadratum.

477. Hæc eadem regula obtinet quoque, ſi in æquatione deeſt aliquis ex terminis intermediis. Nam, ſicuti omnes alii coefficientes, qui ultimum æquationis terminum excipiunt, in applicatione regulæ haberi debent, velut nihilo æquales; ita, pro deficientis termini coefficiente, ſatis erit, zero ſubſtituere. Ut, ſi habeatur æquatio $x^3 - 19x + 30 = 0$; fiet $q = 19$, $r = -30$, & omnes aliii coefficientes evaneſcent. Quare, adhibita regula, erit zero ſumma radicum, 38 ſumma quadratorum, -90 ſumma cuborum, & 722 ſumma quadrato-quadratorum.

478. Nec ſane aliter res ſe habet. Æquationis enim $x^3 - 19x + 30 = 0$ radices tres ſunt 2, 3, & -5. Plane vero, ſi iſtæ colligantur in unum; fiet zero ſumma ipſarum. Quod ſi attollantur ad quadratum; erit $4 + 9 + 25$, hoc eſt 38 ſumma ſuorum quadratorum. Quod ſi porro eleventur ad cubum; erit $8 + 27 - 125$, ſive etiam -90 ſumma ſuorum cuborum. Et denique, ſi eædem radices ad quadrato-quadratum evehantur; fiet $16 + 81 + 625$, hoc eſt 722 ſumma ſuorum quadrato-quadratorum.

479. Atque hæc quum ita ſint, perſpicuum eſt modo, problemata æquationum conſtitutiva poſſe per alias etiam conditiones determinari. Ut, ſi habeatur æquatio $x^2 - ax$,

$+ b^2$

$+ b^2 = 0$, licebit, problema ejus constitutivum huic in modum efferre: invenire duas magnitudines, quarum summa quidem sit a, quadrata vero simul sint $a^2 - 2b^2$. Nec dubium esse potest, quin, solutione hujus problematis, ea nobis æquatio sese offerat.

480. Vocetur namque x magnitudo una. Jamque, ob priorem problematis conditionem, erit $a - x$ magnitudo altera. Unde, quum quadratum primæ sit x^2, & quadratum secundæ sit $a^2 - 2ax + x^2$; erit $a^2 - 2ax + 2x^2$ summa eorum quadratorum. Debet autem summa ista esse $a^2 - 2b^2$. Itaque erit $a^2 - 2ax + 2x^2 = a^2 - 2b^2$, hoc est $2x^2 - 2ax + 2b^2 = 0$; &, divisis terminis omnibus per 2, fiet demum $x^2 - ax + b^2 = 0$.

481. Similiter, si habeatur æquatio $x^3 - ax^2 + b^2x - a^2b = 0$, poterit ipsius problema constitutivum his terminis concipi: invenire tres magnitudines, quarum summa quidem sit a, summa vero quadratorum sit $a^2 - 2b^2$, ac denique summa cuborum sit $a^3 - 3ab^2 + 3a^2b$. Nec difficile erit, ostendere, quod solutione hujus problematis, ea nobis æquatio sit præsens.

482. Si enim vocetur x magnitudo una; erit $a - x$ summa aliarum duarum, $a^2 - 2b^2 - x^2$ summa suorum quadratorum, & $a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - x^3$ summa suorum cuborum. Quia vero $a^2 - 2ax + x^2$ continet, non modo quadrata ex aliis duabus, verum etiam duplum ejus, quod ex earum multiplicatione producitur; erit $a^2 - 2ax + x^2 - a^2 + 2b^2 + x^2$, sive $2x^2 - 2ax + 2b^2$ duplum illius producti, & $x^2 - ax + b^2$ ipsum illud productum.

483.

483. Hinc, si porro multiplicetur $x^2 - ax + b^2$ per $a - x$, & producti $2ax^2 - a^2x + ab^2 - x^3 - b^2x$ capiatur triplum; exhibebit triplum istud duo illa terna * solida, quæ in cubo radicis binomiæ continentur. Quare, si ex $a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$ subducatur $6ax^2 - 3a^2x + 3ab^2 - 3x^3 - 3b^2x$; dabit residuum $a^3 - 3ax^2 + 2x^3 - 3ab^2 + 3b^2x$ cubos, qui fiunt ex aliis duabus magnitudinibus. Unde erit $a^3 - 3ax^2 + 2x^3 - 3ab^2 + 3b^2x = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - x^3$; atque adeo $x^3 - ax^2 + b^2x - a^2b = 0$.

*lib. 1. art. 88.

V. Demonstratio regulæ præcedentis, ex genuino suo fonte deducta.

*art.472. 484. Quam modo * attulimus regulam, pro definienda summa, sive quadratorum, sive cuborum, sive aliarum quarumvis potestatum, quæ fiunt ex radicibus cujuscumque æquationis; ea eximio Newtono ferri debet accepta, qui primus omnium illam indicavit in sua Arithmetica universali. Et quoniam Vir summus ejusmodi regulam absque ulla demonstratione in medium protulit; visum est, rationem ejus, ex genuino suo fonte deductam, hoc loco subnectere.

*art.440. 485. Nimirum, jam vidimus supra *, in unaquaque æquatione coefficientem secundi termini esse summam radicum sub signo mutato; coefficientem termini tertii esse summam productorum ex singulis binis sub signo proprio; coefficientem termini quarti esse summam productorum ex singulis ternis sub signo opposito;

to; coefficientem termini quinti esse summam productorum ex singulis quaternis sub signo proprio; atque ita deinceps. Quare, ubi p, q, r, s, &c. referunt coefficientes illos sub signis mutatis; erit vicissim p summa radicum sub signo proprio, q summa productorum ex singulis binis sub signo contrario, atque ita de aliis.

486. Quum ergo p sit summa radicum sub signo proprio; faciendo $p = a$, etiam a eandem radicum summam exhibebit. Plane vero, quia pa tantundem valet, ac quadratum, quod fit ex summa illa; erunt in pa, non modo quadrata ex radicibus singulis, verum etiam dupla producta, quæ fiunt ex singulis binis. Unde, quia q refert summam horum productorum sub signo mutato; addendo quidem $2q$ ipsi pa, jam subducuntur ex pa dupla illa producta. Quare omnino necesse est, ut, faciendo $pa + 2q = b$, sit b summa quadratorum, quæ fiunt ex radicibus.

487. Qua autem fiat ratione, ut, ponendo $pb + qa + 3r = c$, esse debeat c summa cuborum, qui ex iisdem radicibus fiunt; id sane nonnihil habet difficultatis. Sed haud difficulter rem assequemur, si ponamus, tum loco a valorem ejus p, cum loco b valorem ipsius $pa + 2q$, sive $p^2 + 2q$. Sic enim fiet $pb + qa + 3r = p^3 + 3pq + 3r$: & profecto facile erit ostendere, quantitatem istam $p^3 + 3pq + 3r$ esse summam cuborum quæsitam, si quid in cubo radicis multinomiæ contineatur, sedulo perpendamus.

488. Nimirum, si ex radice multinomia $a + b + c + d +$ &c. fiat cubus; is, juxta regulam alibi * datam, erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d$

* lib. 1. art. 89.

$3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3 +$ &c. Plane vero in hoc cubo, præter cubos partium a, b, c, d, &c., continentur, tum tripla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque partis in partes reliquas, cum sextupla eorum, quæ fiunt ex iisdem partibus, ternatim sumptis. Quare, ut maneant soli cubi partium a, b, c, d, &c., necesse est, ex cubo radicis multinomiæ $a + b + c + d +$ &c. subducere, tum tripla illa producta, cum sextupla ista.

489. Quum ergo p sit summa radicum sub signo proprio; erit p^3 cubus ejus summæ. Unde, quia q est summa productorum ex singulis binis sub signo mutato; addendo $3pq$ ipsi p^3, jam demuntur ex p^3, tum tripla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque radicis in reliquas, cum nonupla productorum, quæ fiunt ex iisdem radicibus, ternatim sumptis. Quoniam vero, ad habendos solos radicum cubos, plus justo tollitur, addenda sunt rursus ei tripla secundorum productorum: & propterea, quum tripla ista producta referat $3r$, dabit $p^3 + 3pq + 3r$ summam cuborum quæsitam.

490. Eadem ratione ostendemus, quod, faciendo $pc + qb + ra + 4s = d$, esse debet d summa quadrato-quadratorum, quæ fiunt ex radicibus æquationis. Si enim loco a ponatur p, loco b ponatur $pa + 2q$, sive $p^2 + 2q$, & loco c ponatur $pb + qa + 3r$, sive $p^3 + 3pq + 3r$; fiet $pc + qb + ra + 4s = p^4 + 4p^2q + 2q^2 + 4pr + 4s$. Unde eo res redit, ut ostendamus, quantitatem istam $p^4 + 4p^2q + 2q^2 + 4pr + 4s$ esse quadrato-quadratorum summam quæsitam.

Unde

Quod quidem erit facile factu, si quid in quadrato quadrato radicis multinomiæ continetur, sedulo perpendamus.

491. Nimirum, si ex radice multinomia fiat quadrato-quadratum; patebit, in eo, præter quadrato-quadrata partium contineri; & quadrupla productorum, quæ fiunt ex cubo cujusque partis in reliquas; & sextupla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque partis in quadrata reliquarum; & duodecupla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque partis in producta reliquarum, binatim sumptarum; & 24cupla productorum, quæ fiunt ex partibus omnibus, quaternatim acceptis. Quare, ut maneant sola quadrato quadrata partium, necesse est, ex quadrato-quadrato radicis multinomiæ omnia ista memorata producta subducere.

492. Quin vero hæc producta exhauriantur per quantitatem $4p^2q + 2q^2 + 4pr + 4s$, quæ addita reperitur ipsi p^4; nulli dubium esse potest. Plane enim per $4p^2q + 4s$ plus justo tollitur. Tolluntur namque; & quadrupla productorum, quæ fiunt ex cubo cujusque radicis in reliquas; & octupla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque radicis in quadrata reliquarum; & vigecupla productorum, quæ fiunt ex quadrato cujusque radicis in producta reliquarum, binatim sumptarum; & 28cupla productorum, quæ fiunt ex radicibus omnibus, quaternatim acceptis. Verum, quod amplius tollitur, restituitur per $2q^2 + 4pr$; ut rem attente consideranti liquido patebit.

493. Eodem prorsus argumento partes alias regulæ Newtonianæ demonstrare licebit, a qui-

bus li benter nos abſtinemus, ne longiores ſimus, quam inſtituti noſtri ratio patitur. Liceat interim hoc loco, eximium Newtoni ingenium mirari, qui rem adeo perplexam pro eo, quo pollebat mentis acumine unica, ac ſimpliciſſima regula nobis aperuit. Neque enim putandum eſt, fato quodam in regulam illam Virum ſummum incidiſſe. Nam omnia eximii hujus Authoris inventa, nonniſi ſummæ, quam in hiſce rebus habebat, peritiæ ferri debent accepta. Quod vel ipſa, quæ in iis eluceſcit, ſimplicitas, ac elegantia abunde demonſtrant.

C A P U T IV.

Radicum imaginariarum in æquationibus perquiſitio.

494. QUum omnes æquationis radices ſunt reales, jam vidimus ſuperius *, qua ratione cognoſci queat, quot ex iis ſunt poſitivæ, & quot negativæ. Sed, quo pacto ſciri poſſit, num inter radices alicujus æquationis aliquæ adſint imaginariæ, & quot eæ ſint numero; id ſane non docuimus. Harum ergo radicum perquiſitionem modo oſtendendam aggredimur: quam operæ pretium ducimus ſingulari capite proſequi; quandoquidem ex variis, multiſque principiis dependet, quæ integri capitis materiam nobis ſuppeditabunt.

* Art. 416.

I. Theo-

I. Theoriæ radicum imaginariarum principia demonstrata.

495. NUm aliqua quantitas sit realis, necne, potest ex ejus quadrato optime dijudicari. Si enim quadratum istud sit quantitas realis positiva; ea, de qua est quæstio, realis proculdubio erit. Quod si autem tale quadratum fiat quantitas realis negativa; imaginariam esse quantitatem, de qua agitur, nec etiam in dubium potest revocari. Hac observatione præmissa, plurima modo de quantitatibus realibus theoremata ostendere licebit, quæ minime locum habent in quantitatibus imaginariis; hæcque ipsa ad perquisitionem radicum imaginariarum recta nos manducent.

496. Ac primo quidem, si binæ fuerint quantitates reales; erunt earum quadrata simul majora semper duplo producti earundem. Sint enim a, & b duæ quævis quantitates reales. Jam earum quadrata simul sunt a^2+b^2; duplum vero productum, quod fit ex earundem multiplicatione, est $2ab$. Ostendendum est ergo, a^2+b^2 plus valere, quam $2ab$; sive a^2+b^2-2ab esse quantitatem positivam: id, quod liquido patet. Est enim $a^2-2ab+b^2$ quadratum ex differentia ipsarum a, & b. Plane vero, sicuti differentia ista est quantitas realis; ita quadratum ejus quantitatem realem positivam esse * oportebit. *art. 495.

497. Secundo, si tres fuerint quantitates reales; erunt earum quadrata simul majora summa productorum ex singulis binis. Sint enim

a, b, c tres quælibet quantitates reales. Jamque,
*art.496. per theorema præcedens *, erit; primo $a^2 + b^2$ major, quam $2ab$; secundo $a^2 + c^2$ major, quam $2ac$; & tertio $b^2 + c^2$ major, quam $2bc$. Itaque, componendo, erit etiam $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ major, quam $2ab + 2ac + 2bc$: proindeque, sumptis semissibus utriusque quantitatis, necesse est, ut pariter $a^2 + b^2 + c^2$ major sit, quam $ab + ac + bc$.

498. Tertio, si quatuor fuerint quantitates reales; erunt earum quadrata simul majora duobus tertiis summæ productorum ex singulis binis. Sint enim a, b, c, d quatuor quævis quanti-
*art.496. tates reales. Jamque, per theorema primum *, erit $a^2 + b^2$ major, quam $2ab$; $a^2 + c^2$ major, quam $2ac$; $a^2 + d^2$ major, quam $2ad$, $b^2 + c^2$ major, quam $2bc$; $b^2 + d^2$ major, quam $2bd$; & $c^2 + d^2$ major, quam $2cd$. Quare, componendo, erit etiam $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2$ major, quam $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$; adeoque, sumptis trientibus utriusque quantitatis, erit pariter $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ major, quam $2ab : 3 + 2ac : 3 + 2ad : 3 + 2bc : 3 + 2bd : 3 + 2cd : 3$.

499. Quarto, si quinque fuerint quantitates reales; erunt earum quadrata simul majora dimidio summæ productorum ex singulis binis. Sint enim a, b, c, d, e quinque quævis quanti-
*art.496. tates reales; eritque, per theorema primum *, $a^2 + b^2$ major, quam $2ab$; $a^2 + c^2$ major, quam $2ac$; $a^2 + d^2$ major, quam $2ad$; $a^2 + e^2$ major, quam $2ae$; $b^2 + c^2$ major, quam $2bc$; $b^2 + d^2$ major, quam $2bd$; $b^2 + e^2$ major, quam $2be$; $c^2 + d^2$ major quam $2cd$; $c^2 + e^2$ major, quam $2ce$; & $d^2 + e^2$ major, quam $2de$. Itaque, componen-

nendo, erit etiam $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2$ major, quam $2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$: & propterea, ſumptis quadrantibus utriuſque quantitatis, erit pariter $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ major, quam $ab:2 + ac:2 + ad:2 + ae:2 + bc:2 + bd:2 + be:2 + cd:2 + ce:2 + de:2$.

500. Non diſſimiliter demonſtrare licebit, quod, ſi ſex fuerint quantitates reales, earum quadrata ſimul majora ſunt duobus quintis ſummæ productorum ex ſingulis binis; majora vero triente ejuſdem ſummæ, ſi fuerint ſeptem; duobus ſeptimis, ſi fuerint octo; atque ita deinceps. Generale autem theorema, quod in hac re locum habet, ita concipi poteſt: quod, ſi fuerit multitudo quævis n quantitatum realium, earum quadrata ſimul majora ſunt ea parte ſummæ productorum ex ſingulis binis, quam deſignat numerus $(n-1):2$. Unde, ſi fuerit $n = 2$, majora erunt duplo producti ipſarum; ſi $n = 3$, majora erunt integra ſumma productorum ex ſingulis binis; ſi $n = 4$, majora erunt duobus tertiis ejus ſummæ; atque ita in infinitum.

501. Cæterum, ſi vera ſunt hæc theoremata, ubi omnes quantitates reales ponuntur poſitivæ; eo magis agnoſcenda eſt veritas eorundem, ubi aliquæ earum quantitatum negativæ aſſumuntur. Nam cunctarum quadrata ſemper quidem poſitiva orientur; inter producta vero ex ſingulis binis ſemper dabuntur nonnulla, quæ ſigno — affecta, minuent omnium ſummam. Quod autem hæc theoremata locum habere non poſſunt in quantitatibus imaginariis, liquet abunde. Jam enim cuncta dependent ex theore-

mate primo. Plane vero demonstratio primi theorematis omnino requirit, ut utriusque quantitatis quadratum positivum oriatur.

502. Ne vero aliquis subsit dubitandi locus, assumantur duæ quantitates imaginariæ, ita, ut sit quantitas realis, tam summa suorum quadratorum, quam productum ex iis. Erunt ergo quantitates istæ $a + \surd - b^2$, & $a - \surd - b^2$. Nam summa ex quadratis ipsarum erit $2a^2 - 2b^2$; productum vero, quod oritur ex multiplicatione eorundem erit $a^2 + b^2$. Perspicuum est autem, summam illam, non solum non esse majorem, verum etiam minorem duplo hujus producti. Itaque tantum abest, posse primum theorema locum habere in quantitatibus imaginariis, ut potius contrarium obtineat. Quod quum ita sit, nec etiam reliqua theoremata in iisdem quantitatibus locum habebunt.

II. Investigatio radicum imaginariarum in æquationibus secundi, & tertii gradus.

503. Ostensis principiis, quibus theoria radicum imaginariarum innititur; sequitur modo, ut, iis mediantibus, istarum investigationem prosequamur. Ac primo quidem, quantum ad æquationes secundi gradus, jam notavimus supra *, duas radices, quas hujusmodi æquationes admittunt, non aliter reales esse posse, quam, si ultimus terminus, vel afficiatur signo $-$, vel etiam affectus signo $+$, sit minus quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Huiusmodi criterium ex resolutione earum æquationum ibidem deduxi-

* art. 437.

ximus; sed videamus modo, quomodo ex positis principiis hoc idem eruatur.

504. Nimirum sit $x^2 \,..\, px \,..\, q = 0$ æquatio secundi gradus, duas habens radices reales; sintque a, & b binæ ejus radices. Itaque, per primum theorema *, erit $a^2 + b^2$ major, quam $2ab$. *art.496.
Unde, addito utrinque $2ab$, erit etiam $a^2 + 2ab + b^2$ major, quam $4ab$. Est autem, ex natura coefficientium *, $a^2 + 2ab + b^2 = p^2$, estque *art.440.
etiam $4ab = 4q$. Quare erit quoque p^2 major, quam $4q$; & $p^2 : 4$ major, quam q. Unde $p^2 : 4 - q$ quantitas positiva esse debet. Quod, perspicuum est, fieri non posse, nisi in æquatione terminus ultimus q, vel afficiatur signo $-$, vel affectus signo $+$, minor sit quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato.

505. Pergamus modo ad æquationes tertii gradus, quarum una semper radix realis esse debet *. Et in istis quidem non aliter omnes ra- *art.432.
dices reales esse possunt, nisi obtineant hæc duo. Primum est, ut coefficiens termini tertii, si afficiatur signo $+$, minor sit triente quadrati, quod fit ex coefficiente secundi termini. Alterum est, ut productum ex ultimo termino in coefficientem secundi, si afficiatur signo $+$, minus sit triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. Nec difficile erit, ex positis principiis horum utrumque deducere.

506. Sit enim æquatio tertii gradus, habens omnes radices reales $x^3 \,..\, px^2 \,..\, qx \,..\, r = 0$; sintque a, b, c tres ejus radices. Itaque, per theorema secundum *, $a^2 + b^2 + c^2$ major *art.497.
erit, quam $ab + ac + bc$; adeoque, addito utrinque $2ab + 2ac + 2bc$; erit etiam $a^2 + 2ab + b^2$

$+ 2ac + 2bc + c^2$ major, quam $3ab + 3ac +$
*art.440. $3bc$. Sed, ex natura coefficientium *, eſt $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = p^2$, & $3ab + 3ac + 3bc = 3q$. Quare erit quoque p^2 major, quam $3q$, & $p^2 : 3$ major, quam q. Unde $p^2 : 3 - q$ eſſe debet quantitas poſitiva. Quod, perſpicuum eſt, fieri non poſſe, niſi in æquatione coefficiens tertii termini q, vel afficiatur ſigno $-$, vel affectus ſigno $+$, minor ſit triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini ſecundi.

507. Porro, ſemper ac quantitates a, b, c ſunt reales; erunt etiam realia producta ex ſingulis binis ab, ac, bc. Quare, per theorema
art.497. ſecundum, erit $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ major, quam $a^2bc + ab^2c + abc^2$; adeoque, addito utrinque $2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$, erit etiam $a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2 + 2ab^2c + 2abc^2 + b^2c^2$ major, quam $3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2$; hoc eſt $(ab + ac + bc)^2$ major, quam $(a + b + c) 3abc$.
*art.440. Eſt autem, ex natura coefficientium *, $(ab + ac + bc)^2 = q^2$, eſtque etiam $(a + b + c) 3abc = 3pr$. Itaque erit q^2 major, quam $3pr$, & $q^2 : 3$ major, quam pr, Unde $q^2 : 3 - pr$ eſſe debet quantitas poſitiva. Quod, liquet, fieri non poſſe, niſi productum ex ultimo termino r in coefficientem ſecundi p, vel afficiatur ſigno $-$, vel affectum ſigno $+$, minus ſit triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii q.

508. Hæc autem quum ita ſint, abunde liquet, quod, ſicuti in æquatione ſecundi gradus duæ radices ſunt imaginariæ, ubi ultimus terminus afficitur ſigno $+$, & eſt major quadrato, quod fit ex coefficiente ſecundi termini dimidiato; ita in æquatione tertii gradus exiſtunt radi-

ces

ces duæ imaginariæ ; primo, ubi coefficiens tertii termini afficitur ſigno +, & eſt major triente quadrati, quod fit ex coefficiente ſecundi termini ; & ſecundo, ubi productum ex ultimo termino in coefficientem ſecundi afficitur ſigno +, & eſt majus triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

509. Hinc vero ſequitur primo, quod, quum in æquatione tertii gradus deficit ſecundus terminus, & tertius afficitur ſigno +, duæ ejus radices omnino imaginariæ eſſe debent. Nam, nullo exiſtente coefficiente ſecundi termini, nullum eſt etiam quadratum, quod fit ex coefficiente illo : proindeque coefficiens tertii termini, qui affectus ſupponitur ſigno +, ſemper quadrato illo major erit. Deficiente igitur ſecundo termino, non aliter radices omnes reales eſſe poſſunt, quam ubi terminus tertius afficitur ſigno —.

510. Interim haud quidem putandum eſt, reales eſſe ſemper radices æquationis, ubi deficit ſecundus terminus, & tertius reperitur affectus ſigno —. Nam neceſſe eſt quoque, ut quadratum ultimi termini dimidiati minus ſit cubo, qui fit ex triente coefficientis termini tertii, poſitive ſumpti : adeo nempe, ut, ſi quadratum illud cubo iſto ſit majus ; tunc, non obſtante ſigno —, quo afficitur tertius terminus, adhuc in æquatione duæ erunt radices imaginariæ.

511. Ut id oſtendamus, ſit $x^3 - qx$ .. $r = 0$ æquatio tertii gradus, quæ ſecundo termino carens, omnes habet radices reales. Et, ob defectum ſecundi termini, ſumma duarum radicum, quæ ſunt ejuſdem ſigni, æqualis eſſe debet

*art.447. bet * radici tertiæ, quæ ſignum habet contrarium. Quare, ſi ex duabus iis radicibus una ſit $a + b$, & altera $a - b$; erit tertia radix $- 2a$:
*art.440. & ea propter, ex natura coefficientium *, fiet $q = 3a^2 + b^2$, & $r = 2a^3 - 2ab^2$; ſive etiam $q : 3 = a^2 + b^2 : 3$, & $r : 2 = a^3 - ab^2$.

512. Quia vero a, & b ſunt quantitates reales; erunt item reales quantitates a^2b, & $b^3 : 9$.
*art.496. Quare, per theorema primum *, erit $a^4b^2 + b^6 : 81$ major, quam $2a^2b^4 : 9$; atque adeo, triplicata utraque quantitate, & addito unicuique $a^6 - 2a^4b^2 + a^2b^4 : 3$, erit etiam $a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 : 3 + b^6 : 27$ major, quam $a^6 - 2a^4b^2 + a^2b^4$. Eſt autem prior quantitas cubus ex $a^2 + b^2 : 3$, ſive ex $q : 3$; eſtque etiam ſecunda quadratum ex $a^3 - ab^2$, ſive ex $r : 2$. Quare erit cubus ex $q : 3$ major quadrato ex $r : 2$: & propterea, ubi ex æquatione tertii gradus deficit ſecundus terminus, tres ejus radices non aliter eſſe poſſunt reales, niſi quadratum ultimi termini dimidiati minus ſit cubo, qui ſit ex triente coefficientis tertii termini, poſitive ſumpti.

513. Sequitur quoque, quod, quum in æquatione tertii gradus deficit tertius terminus, & alii duo, hinc inde exiſtentes, afficiuntur ſignis ſimilibus, duæ ejus radices omnino imaginariæ eſſe debent. Nam, nullo exiſtente coefficiente tertii termini, nullum eſt etiam quadratum ejus coefficientis: proindeque productum ex ultimo termino in coefficientem ſecundi, quod, ob ſimilitudinem ſignorum, oritur affectum ſigno $+$, ſemper quadrato illo majus erit. Deficiente igitur tertio termino, non aliter radices omnes reales eſſe poſſunt, niſi ſecundus, & ul-

& ultimus signa habeant contraria.

514. Neque vero putandum est, reales esse semper radices æquationis, ubi deficit tertius terminus, & alii duo, hinc inde existentes, reperiuntur habere signa contraria. Nam necesse est quoque, ut ultimus terminus, positive sumptus, minor sit quadruplo cubi, qui fit ex triente coefficientis secundi termini, positive etiam accepti: adeo nempe, ut si terminus ille quadruplo hujus cubi sit major; non obstante contrarietate signorum, quibus secundus, & ultimus terminus afficiuntur, adhuc in æquatione duæ erunt radices imaginariæ.

515. Ostendetur id autem in hunc modum. Sit $x^3 - px^2 + r = 0$ æquatio cubica, quæ tertio termino carens, omnes habet radices reales. Et, ob defectum tertii termini, radices ejus tales esse debent, ut producta ex singulis binis, contrarietate signorum, sese mutuo destruant *. *art. 448.
Itaque, si duæ radices sint a, & b, plane necesse est, ut sit $-ab:(a+b)$ radix tertia: & propterea, ex natura coefficientium *, fiet $p = a + b$ *art. 440.
$-ab:(a+b) = (a^2+ab+b^2):(a+b)$, & $r = a^2b^2:(a+b)$.

516. Quia vero a, & b sunt quantitates reales; erit etiam $a^3 + 3a^2b:2 - 3ab^2:2 - b^3$ quantitas realis; adeoq; quadratum ejus positivum erit *: & propterea pars negativa hujus quadrati *art. 495.
$3a^4b^2:4 + 13a^3b^3:2 + 3a^2b^4:4$ major erit parte positiva $a^6 + 3a^5b + 3ab^5 + b^6$. Addatur utrinque $6a^4b^2 + 7a^3b^3 + 6a^2b^4$; & fiet $27a^4b^2:4 + 27a^3b^3:2 + 27a^2b^4:4$, sive $27a^2b^2(a+b)^2:4$ minor, quam cubus ex a^2+ab+b^2. Unde, quum esse debeat etiam $27a^2b^2:4(a+b)$ minor

nor cubo ex $(a^2 + ab + b^2):(a + b)$; erit $27r:4$ minor cubo, qui fit ex p; atque adeo r minor quadruplo cubi, qui fit ex triente ipsius p.

III. Investigatio radicum imaginariarum in æquationibus quarti gradus.

517. Quantum ad æquationes quarti gradus, ut in iis omnes radices sint reales, hæc tria adsint, oportet. Primo, ut coefficiens tertii termini, si afficiatur signo $+$, minor sit tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi. Secundo, ut productum ex ultimo termino in coefficientem tertii, si afficiatur signo $+$, minus sit tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti. Et tertio demum, ut productum ex coefficientibus secundi, & quarti termini, si afficiatur signo $+$, minus sit quatuor nonis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. Neque vero difficile erit, ex positis principiis horum unumquodque deducere.

518. Esto enim $x^4 \, .. \, px^3 \, .. \, qx^2 \, .. \, rx \, .. \, s = 0$ æquatio quarti gradus, omnes habens radices reales; sintque a, b, c, d quatuor ejus radices. Itaque, per theorema tertium *, erit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ major, quam $2(ab + ac + ad + bc + bd + cd):3$; &, addito utrinque $2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$, erit etiam $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$ major, quam $8(ab + ac + ad + bc + bd + cd):3$. Est autem, ex natura coefficientium *, $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ $+ 2ad$

* art. 493.

* art. 440.

$+ 2ad + 2bd + 2cd + d^2 = p^2$, & $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$. Quare erit quoque p^2 major, quam $8q : 3$, & $3p^2 : 8$ major, quam q: proindeque $3p^2 : 8 - q$ esse debet quantitas positiva. Quod, perspicuum est, fieri non posse, nisi in æquatione coefficiens termini tertii, vel afficiatur signo $-$, vel affectus signo $+$, minor sit tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi.

519. Porro, si reales sunt quantitates a, b, c, d; erunt etiam realia producta, quæ fiunt ex singulis ternis, abc, abd, acd, bcd. Quare, per theorema tertium *, summa quadratorum ex iis major erit duobus trientibus summæ productorum ex singulis binis; adeoque, addito utrinque duplo secundæ hujus summæ, erit $(abc + abd + acd + bcd)^2$ major, quam $8(a^2b^2cd + a^2bc^2d + ab^2c^2d + a^2bcd^2 + ab^2cd^2 + abc^2d^2) : 3$, sive $8abcd(ab + ac + bc + ad + bd + cd)$: nimirum, ex natura coefficientium *, erit r^2 major, quam $8qs : 3$; & $3r^2 : 8$ major, quam qs: proindeque $3r^2 : 8 - qs$ esse debet quantitas positiva. Quod, liquet, fieri non posse, nisi in æquatione productum ex ultimo termino in coefficientem tertii, vel afficiatur signo $-$, vel affectum signo $+$, minus sit tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

*art. 498.

*art. 440.

520. Denique, quum a, & b sint quantitates reales; erit, per theorema primum *, $a^2 + b^2$ major, quam $2ab$; & $a^2cd + b^2cd$ major, quam $2abcd$. Quia vero eadem est demonstratio de singulis binariis quantitatum a, b, c, d; erit $a^2(bc + bd + cd) + b^2(ac + ad + cd) + c^2(ab$

*art. 496.

$+ ad$

$+ad+bd)+d^2(ab+ac+bc)$ major, quam $12abcd$, & $a^2(bc+bd+cd)+b^2(ac+ad+cd)+c^2(ab+ad+bd)+d^2(ab+ac+bc)+3abcd$ major, quam $15abcd$. Jam quantitas illa, quæ dicatur A, est summa productorum ex singulis binis harum quantitatum ab, ac, ad, bc, bd, cd, quarum summa est q. Quare, per
*art. 500. theorema generale *, summa ex quadratis istarum major erit, quam $2A:5$; atque adeo q^2 major, quam $12A:5$.

521. Quum autem q^2 major sit, quam $12A:5$; erit etiam $4q^2:9$ major, quam $16A:15$: & pro-
*art. 520. pterea, quum $A:15$ major sit *, quam $abcd$; erit $4q^2:9$ multo major, quam $A+abcd$. Jam
*art. 440. vero, ex natura coefficientium *, $A+abcd$ idem est, ac pr. Quare erit $4q^2:9$ major, quam pr; & consequenter $4q^2:9-pr$ esse debet quantitas positiva. Quod, perspicuum est, fieri non posse, nisi productum ex coefficientibus secundi, & quarti termini, vel afficiatur signo $-$, vel affectum signo $+$, minus sit quatuor nonis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

522. Interim hæc tertia conditio majorem adhuc determinationem subire potest. Jam enim
*art. 520. ostensum * est, q^2 majorem esse, quam $12A:5$. Quare erit quoque $5q^2:12$ major, quam A, & $5q:12+abcd$ major, quam $A+abcd$. Sed,
*art. 440. ex natura coefficientium *, sicuti $A+abcd$ idem est, ac pr; ita $abcd$ tantundem valet, ac s. Itaque erit adhuc $5q^2:12+s$ major, quam pr: & propterea $5q^2:12+s-pr$ esse debet quantitas positiva. Quod, liquet, fieri non posse, nisi residuum, quod oritur, subducendo ulti-

mum

mum terminum ex producto coefficientium secundi, & quarti, vel afficiatur signo —, vel affectum signo +, minus sit quinque duodecimis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

523. Hæc autem, quúm ita sint, perspicuum est, in æquatione quarti gradus adesse radices imaginarias; primo, ubi coefficiens tertii termini afficitur signo +, & est majus tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi; secundo, ubi productum ex ultimo termino in coefficientem tertii afficitur signo +, & est majus tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti; ac tertio demum, ubi productum ex coefficientibus secundi, & quarti termini afficitur signo +, & est majus quatuor nonis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

524. Quia vero postrema ista conditio in plerisque casibus radices imaginarias nequaquam exhibet; licebit, loco ejus, substituere hanc aliam, quæ rem ponit extra omnem dubitationis aleam: nimirum, ut adsint in æquatione quarti gradus radices imaginariæ, ubi residuum, quod nascitur, subducendo ultimum terminum ex producto coefficientium secundi, & quarti, afficitur signo +, & est majus quinque duodecimis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. Nam, ut paulo ante * vidimus, residuum istud, ubi omnes radices sunt reales, vel affici debet signo —, vel affectum signo +, minus sit oportet prædicta parte illius quadrati. *Art. 522.

525. Cæterum ex iis, quæ modo ostensa

sunt

Art. 523. sunt * , abunde liquet, quod, quum in æquatione quarti gradus deficit secundus terminus, & tertius afficitur signo +, reperiri debent in ea radices imaginariæ. Nam, nullo existente coefficiente secundi termini, nullum est etiam ejus quadratum: proindeque coefficiens tertii termini, qui affectus supponitur signo +, semper tribus octavis partibus illius quadrati major erit. Et, ob eandem rationem, perspicuum est quoque, quod, ubi deest tertius, vel quartus terminus, & termini, hinc inde existentes a deficiente termino, similibus signis sunt affecti; omnino esse debent in æquatione radices imaginariæ.

IV. Investigatio radicum imaginariarum in æquationibus quinti gradus.

526. AD æquationes quinti gradus, quod attinet, ut in iis reales sint radices omnes, hæc quatuor adsint, oportet. Primo, ut coefficiens tertii termini, si afficiatur signo +, minor sit duabus quintis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi. Secundo, ut productum ex ultimo termino in coefficientem quarti, si afficiatur signo +, minus sit duabus quintis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quinti. Tertio, ut productum ex coefficientibus secundi, & quarti termini, si afficiatur signo +, minus sit semisse quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. Et quarto demum, ut productum ex coefficientibus tertii, & quinti termini, si afficiatur signo +, minus sit semisse quadra-

drati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

527. Ut hæc ostendantur, sit $x^5 \,..\, px^4 \,..\, qx^3 \,..\, rx^2 \,..\, sx \,..\, t = 0$ æquatio quinti gradus, omnes habens radices reales; sintque a, b, c, d, e quinque ejus radices. Itaque, per theorema quartum *, summa ex quadratis earum radicum major erit dimidio summæ productorum ex singulis binis, sive $q:2$; &, addito utrinque duplo secundæ hujus summæ, erit etiam quadratum ex summa illarum radicum, nimirum p^2, majus, quam $5q:2$; & consequenter $2p^2:5$ major, quam q. Est igitur $2p^2:5 - q$ quantitas positiva. Quod quidem non aliter fieri potest, nisi in æquatione coefficiens termini tertii, vel afficiatur signo $-$, vel affectus signo $+$, minor sit duabus quintis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi. *art. 499.

528. Porro, si reales sunt quantitates a, b, c, d, e; erunt etiam realia producta, quæ fiunt ex singulis quaternis $abcd$, $abce$, $abde$, $acde$, $bcde$. Quare, per theorema quartum *, summa quadratorum ex iis major erit dimidio summæ productorum ex singulis binis; adeoque, addito utrinque duplo secundæ hujus summæ, & habita coefficientium ratione *, erit etiam s^2 major, quam $5tr:2$; & consequenter $2s^2:5$ major, quam tr. Quantitas ergo $2s^2:5 - tr$ positiva esse debet. Quod profecto non aliter fieri potest, nisi in æquatione productum ex ultimo termino in coefficientem quarti, vel afficiatur signo $-$, vel affectum signo $+$, minus sit duabus quintis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quinti. *art. 499. *art. 440.

529. Ulterius, quum a, b, c sint quanti-

*art.497. tates reales; erit, per theorema secundum *, $a^2 + b^2 + c^2$ major, quam $ab + ac + bc$; & $(a^2 + b^2 + c^2)de$ major, quam $(ab + ac + bc)de$. Quia vero eadem est demonstratio de singulis ternariis quantitatum a, b, c, d, e; erit summa productorum ex quadrato cujusque in facta reliquarum, binatim sumptarum, major, quam $6(abcd + abce + abde + acde + bcde)$; & eadem illa summa, aucta quantitate $3(abcd + abce + abde + acde + bcde)$, major, quam $9(abcd + abce + abde + acde + bcde)$. Jam vero summa illa, subinde aucta, quæ dicatur A, est summa productorum ex singulis binis harum quantitatum $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$, quarum summa est q.
*art.500. Quare, per theorema generale *, summa ex quadratis istarum major erit, quam $2A : 9$; atque adeo q^2 major, quam $20A : 9$.

530. Quum autem q^2 major sit, quam $20A : 9$; erit etiam $q^2 : 2$ major, quam $10A : 9$: & pro-
*art.529. pterea, quum $A : 9$ major * sit, quam $(abcd + abce + abde + acde + bcde)$; erit $q^2 : 2$ multo major, quam $A + abcd + abce + abde + acde + bcde)$.
*art.440. Sed, ex natura coefficientium *; $A + (abcd + abce + abde + acde + bcde)$ idem est, ac pr. Quare erit $q^2 : 2$ major, quam pr; & consequenter $q^2 : 2 - pr$ esse debet quantitas positiva. Quod sane fieri non potest, nisi productum ex coefficientibus secundi, & quarti termini, vel afficiatur signo —, vel affectum signo +, minus sit semisse quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

531. Interim hæc tertia conditio majorem adhuc determinationem subire potest. Jam enim
*art.529. ostensum est *, q^2 majorem esse, quam $20A : 9$. Qua-

9. Quare erit quoque $9q^2 : 20$ major, quam A; & $9q^2 : 20 + (abcd + abce + abde + acde + bcde)$, major, quam $A + (abcd + abce + abde + acde + bcde)$. Sed, ex natura coefficientium *, ficuti $A + (abcd + abce + abde + acde + bcde)$ idem eſt, ac pr, ita $abcd + abce + abde + acde + bcde$ tantundem valet, ac s. Itaque erit adhuc $9q^2 : 20 + s$ major, quam pr: & propterea $9q^2 : 20 + s - pr$ eſſe debet quantitas poſitiva. Quod fieri non poteſt, niſi reſiduum, quod oritur, ſubducendo coefficientem quinti termini ex producto coefficientium ſecundi, & quarti, vel afficiatur ſigno $-$, vel affectum ſigno $+$ minus ſit novem vigeſimis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. *art. 440.

532. Denique, quum a, b, c ſint quantitates reales; erunt etiam realia producta ab, ac; adeoque, per theorema primum *, erit $a^2b^2 + a^2c^2$ major, quam $2a^2bc$, & $(a^2b^2 + a^2c^2)\,de$ major, quam $2a^2bcde$. Pergendo autem deinceps, oſtendetur in hunc modum, omnia producta ex facto quadratorum duarum ex hiſce a, b, c, d, e in ſingula producta ex binis quibuſvis trium reliquarum, quæ ſunt numero triginta, majora eſſe, quam $6(a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd)$; & eadem illa producta, aucta quantitate $3(a^2bcde + b^2acde + c^2abde$ $d^2abce + e^2abcd)$, majora, quam $9(a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd)$. Jam vero producta illa, ſubinde aucta, quæ vocentur A, eſt ſumma productorum ex ſingulis binis harum quantitatum abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde, quarum ſumma eſt r. Quare, per theorema generale *, ſumma ex qua- *art. 496. *art. 5[illegible]

dratis istarum major erit, quam 2A : 9; atque adeo r^2 major, quam 20A : 9.

533. Quum autem r^2 major sit, quam 20A:9; erit etiam $r^2 : 2$ major, quam 10A : 9 : & propterea, quum A : 9 major sit *, quam $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$; erit r^2: 2 multo major, quam A + $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$. Sed, ex natura coefficientium *, A + $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem est, ac qs. Quare erit $r^2 : 2$ major, quam qs; & consequenter $r^2 : 2 - qs$ esse debet quantitas positiva. Quod, perspicuum est, fieri non posse, nisi productum ex coefficientibus tertii, & quinti termini, vel afficiatur signo —, vel affectum signo +, minus sit semisse quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

* Art. 532.

* Art. 440.

534. Sed, quarta ista conditio majorem quoque determinationem subire potest. Ostensum est * namque, r^2 majorem esse, quam 20A : 9. Itaque erit etiam $9r^2 : 20$ major, quam A; & $9r^2 : 20 + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ major, quam A + $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$. Plane vero, ex natura coefficientium *, sicuti A + $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem est, ac qs; ita $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem est, ac pt. Quare erit $9r^2 : 20 + pt$ major, quam qs: proindeque $9r^2 : 20 + pt - qs$ esse debet quantitas positiva. Quod fieri non potest, nisi residuum, quod oritur, subducendo productum ultimi termini, & coefficientis secundi ex producto coefficientium tertii, & quinti, vel afficiatur signo —, vel affe-

* Art. 532.

* Art. 440.

ctum

ctum signo +, minus sit novem vigesimis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

535. Ex quibus modo ultro liquet, quando in æquatione quinti gradus dantur radices imaginariæ: nimirum, quum deest in ea aliqua ex recensitis conditionibus. Sed liquet quoque, quod, si in æquatione quinti gradus desit secundus terminus, & tertius afficiatur signo +, in ea necessario esse debent radices imaginariæ. Nam, deficiente secundo termino, nullus est ejus coefficiens: proindeque, quum nullum quoque fiat ejus quadratum, semper coefficiens termini tertii, qui supponitur affectus signo +, majus erit duabus quintis partibus ejus quadrati. Et, ob eandem rationem, perspicuum est pariter, quod, deficiente quocumque alio termino, & aliis, hinc inde positis, habentibus signa similia, dari debent in æquatione radices imaginariæ.

V. *Perquisitio radicum imaginariarum in æquationibus altioris gradus.*

536. IIsdem principiis insistendo, determinare licebit, quando in æquationibus altioris gradus radices omnes sunt reales. Ita, si æquatio fuerit sexti gradus, comprehensa sub hac formula generali $x^6 .. px^5 .. qx^4 .. rx^3 .. sx^2 .. tx .. k = 0$, unaquæque ejus radix realis erit; primo, si q, ubi afficitur signo +, minor sit, quam $5p^2 : 12$; secundo, si sk, ubi afficitur signo +, minor sit, quam $5t^2 : 12$; tertio, si pr, ubi afficitur signo +, minor sit, quam $8q^2 : 15$; quarto, si rt, ubi afficitur signo

 +, mi-

dratis iſtarum major erit, quam 2A : 9; atque adeo r^2 major, quam 20A : 9.

533. Quum autem r^2 major ſit, quam 20A : 9; erit etiam $r^2 : 2$ major, quam 10A : 9 : & *art. 532. propterea, quum A : 9 major ſit *, quam $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$; erit $r^2 : 2$ multo major, quam $A + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$. Sed, ex natura coef- *art. 440. ficientium *, $A + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem eſt, ac qs. Quare erit $r^2 : 2$ major, quam qs; & conſequenter $r^2 : 2 - qs$ eſſe debet quantitas poſitiva. Quod, perſpicuum eſt, fieri non poſſe, niſi productum ex coefficientibus tertii, & quinti termini, vel afficiatur ſigno —, vel affectum ſigno +, minus ſit ſemiſſe quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

534. Sed, quarta iſta conditio majorem quoque determinationem ſubire poteſt. Oſtenſum *art. 532. eſt * namque, r^2 majorem eſſe, quam 20A : 9. Itaque erit etiam $9r^2 : 20$ major, quam A; & $9r^2 : 20 + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ major, quam $A + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$. Plane vero, ex na- *art. 440. tura coefficientium *, ſicuti $A + a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem eſt, ac qs; ita $a^2bcde + b^2acde + c^2abde + d^2abce + e^2abcd$ idem eſt, ac pt. Quare erit $9r^2 : 20 + pt$ major, quam qs: proindeque $9r^2 : 20 + pt - qs$ eſſe debet quantitas poſitiva. Quod fieri non poteſt, niſi reſiduum [illegible] ducendo productum [illegible] cientis ſecun[illegible] tii, & qu

ctum signo +, minus sit novem vigesimis partibus quadrati, quod sit ex coefficiente termini quarti.

335. Ex quibus modo ultro liquet, quando in æquatione quinti gradus dantur radices imaginariæ: nimirum, quum deest in ea aliqua ex recensitis conditionibus. Sed liquet quoque, quod, si in æquatione quinti gradus desit secundus terminus, & tertius afficiatur signo +, in ea necessario esse debent radices imaginariæ. Nam, deficiente secundo termino, nullus est ejus coefficiens: proindeque, quum nullum quoque fiat ejus quadratum, semper coefficiens termini tertii, qui supponitur affectus signo +, majus erit duabus quintis partibus ejus quadrati. Et, ob eandem rationem, perspicuum est pariter, quod, deficiente quocumque alio termino, & aliis, hinc inde positis, habentibus signa similia, dari debeat in æquatione radices imaginariæ.

V. *Perquisitio radicum imaginariarum in æquationibus altioris gradus.*

536. Iisdem principiis insistendo, determinare licebit, quando in æquationibus altioris gradus radices omnes sunt reales. Ita, si æquatio fuerit sexti gradus, comprehensa sub hac formula generali $x^6 .. px^5 ..$ $qx^4 .. rx^3 .. sx^2 .. tx .. k = 0$, unaquæque ejus radix realis erit [illegible] ubi affic[illegible] signo +, minor si[illegible] [illegible]k, ubi afficitur si[illegible] ; sem[illegible] termino [illegible] [illegible]

+, minor ſit, quam $8s^2 : 15$; & denique, ſi qs, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $9r^2 : 16$

537. Sed, poſtremæ tres conditiones majorem adhuc determinationem ſubire poſſunt. Primis etenim duabus iiſdem exiſtentibus, reales erunt omnes æquationis radices; tertio, ſi differentia inter pr, & s, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $7q^2 : 15$; quarto, ſi differentia inter rt, & qk, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $7s^2 : 15$; ac demum, ſi differentia inter pt, & ſummam ex qs, & k, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $19r^2 : 40$.

538. Similiter, ſi æquatio fuerit ſeptimi gradus, contenta ſub hac formula generali $x^7 \,..\, px^6 \,..\, qx^5 \,..\, rx^4 \,..\, sx^3 \,..\, tx^2 \,..\, kx \,..\, l = 0$, radices ejus erunt omnes reales; primo, ſi q, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $3p^2 : 7$; ſecundo, ſi tl, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $3k^2 : 7$; tertio, ſi pr, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $5q^2 : 9$; quarto, ſi sk, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $5t^2 : 9$; quinto, ſi qs, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $3r^2 : 5$; ac denique, ſi rt, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $3s^2 : 5$.

539. Sed hic quoque quatuor poſtremæ conditiones majorem adhuc determinationem ſubire queunt. Nam, duabus primis exiſtentibus iiſdem, reales erunt omnes æquationis radices; tertio, ſi differentia inter pr, & s, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $10q^2 : 21$; quarto, ſi differentia inter sk, & rl, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $10t^2 : 21$; quinto, ſi differentia inter pt, & ſummam ex qs, & k, ubi afficitur ſigno +, minor ſit, quam $17r^2$:

35; ac demum, si differentia inter qk, & summam ex rt, & pl, ubi afficitur signo +, minor sit, quam $17s^2 : 35$.

540. Licebit interim, universam hanc theoriam duabus regulis generalibus comprehendere. Prior ita se habet. Numeris 1, 2, 3, 4, &c., continuatis usque ad eum, qui gradum æquationis ostendit, adscribantur, velut denominatores, iidem numeri, inverso ordine sumpti; & ortarum fractionum unaquæque per subsequentem dividatur. Scribantur deinde quotientes isti super æquationis terminis intermediis; jamque reales erunt omnes ejus radices, si quadratum coefficientis cujusque termini, ductum in fractionem imminentem, majus sit producto ex coefficientibus terminorum, hinc inde ab eo existentium.

541. Ut, si æquatio fuerit quarti gradus $x^4 \,..\, px^3 \,..\, qx^2 \,..\, rx \,..\, s = 0$; fractiones erunt $1:4$, $2:3$, $3:2$, $4:1$. Et, unaquaque ipsarum per subsequentem divisa, orientur quotientes $3:8$, $4:9$, $3:8$. Unde, scriptis quotientibus hisce super tribus terminis intermediis, necesse est, ut $3p^2 : 8$ major sit, quam q; $4q^2 : 9$ major, quam pr; & $3r^2 : 8$ major, quam qs. Quod si vero æquatio sit quinti gradus $x^5 \,..\, px^4 \,..\, qx^3 \,..\, rx^2 \,..\, sx \,..\, t = 0$; fractiones erunt $1:5$, $2:4$, $3:3$, $4:2$, $5:1$; quotientes autem $2:5$, $1:2$, $1:2$, $2:5$. Quare, notatis quotientibus istis super quatuor terminis intermediis, necesse est, ut $2p^2 : 5$ major sit, quam q; $q^2 : 2$ major, quam pr; $r^2 : 2$ major, quam qs; & $2s^2 : 5$ major, quam rt.

542. Altera regula sic concipi potest. Ex

coefficientibus terminorum intermediorum ejus potestatis radicis binomiæ, quam gradus æquationis ostendit, fiant subinde fractiones totidem, ut numeratores sint ii coefficientes, unitate minuti; denominatores autem iidem coefficientes duplicati. Scribantur deinde fractiones istæ super æquationis terminis intermediis; jamque erunt reales omnes radices, si quadratum coefficientis cujusque termini, ductum in fractionem imminentem, majus sit producto ex coefficientibus terminorum adjacentium, vicibus multato, & aucto productis, quæ fiunt ex coefficientibus aliorum terminorum, utrinque eos ordine excipientium.

543. Ut, si æquatio fuerit quarti gradus $x^4 \,..\, px^3 \,..\, qx^2 \,..\, rx \,..\, s = 0$; fractiones constituendæ erunt $3:8$, $5:12$, $3:8$; quandoquidem coefficientes terminorum intermediorum quartæ potestatis radicis binomiæ sunt 4, 6, 4. Unde, scriptis fractionibus iis super tribus terminis intermediis; necesse est, ut $3p^2:8$ major sit, quam q; $5q^2:12$ major, quam $pr - s$; & & $3r^2:8$ major, quam qs. Quod si vero æquatio sit quinti gradus $x^5 \,..\, px^4 \,..\, qx^3 \,..\, rx^2 \,..\, sx \,..\, t = 0$, fractiones fient $2:5$, $9:20$, $9:20$, $2:5$. Et, notatis iis super quatuor terminis intermediis, necesse est, ut $2p^2:5$ major sit, quam q; $9q^2:20$ major, quam $pr - s$; $9r^2:20$ major, quam $qs - pt$; & $2s^2:5$ major, quam rt.

544. Sed, ut sensus secundæ hujus regulæ clarior evadat, proponatur ulterius æquatio octavi gradus $x^8 \,..\, px^7 \,..\, qx^6 \,..\, rx^5 \,..\, sx^4 \,..\, tx^3 \,..\, kx^2 \,..\, lx \,..\, m = 0$. Jam coefficientes terminorum intermediorum octavæ potestatis radicis bino-

no-

nomiæ sunt 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8: proindeque fractiones, de quibus agitur erunt 7 : 16, 27 : 56, 55 : 112, 69 : 140, 55 : 112, 27 : 56, 7 : 16. Hinc, scribendo fractiones istas super æquationis terminis intermediis, erunt reales radices omnes æquationis, si fuerit; primo $7p^2 : 16$ major, quam q; secundo $27q^2 : 56$ major, quam $pr - s$; tertio $55r^2 : 112$ major, quam $qs - pt + k$: quarto $69s^2 : 140$ major, quam $rt - qk + pl - m$; quinto $55t^2 : 112$ major, quam $sk - rl + qm$; sexto $27k^2 : 56$ major, quam $tl - sm$; ac septimo demum $7l^2 : 16$ major, quam km.

545. Sed notandum hoc loco est, quod, ex duabus hisce regulis, res accuratius determinatur per secundam, quam per primam. Nam persæpe accidit, ut quæ radices produnt reales, adhibita priore regula; eædem inveniantur imaginariæ, ubi regula altera adhibetur. Quod sane exinde repeti debet, quia conditiones, ut ita dicam, intermediæ prioris regulæ majorem subeunt determinationem in secunda. Harum autem regularum priorem absque ulla demonstratione exhibuit primus omnium Isaac Newtonus in sua Arithmetica universali; secunda vero ferenda est accepta Georgio Campbell, qui eam publici juris fecit in Transactionibus Philosophicis Regiæ Societatis Londinensis.

546. Cæterum, utraque harum regularum investigatur numerus radicum imaginariarum, existentium in æquatione aliqua, in hunc modum. Subscribatur signum +, tam primo, quam ultimo termino æquationis. Et, si res in singulis terminis intermediis perinde succedat, qualem

lem exigunt regulæ ; iis quoque ſignum + ſubſcribatur. Quod ſi vero in aliquo termino res aliter eveniat; ſufficiatur ei ſignum —. Et quot mutationes reperiuntur ſignorum, ſive de + in —, ſive de — in +; tot erunt in æquatione radices imaginariæ : ſicuti per contrarium tot dabuntur radices reales, quot continuationes ſignorum ibidem occurrunt.

547. Proponatur æquatio trium dimenſionum $x^3 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$. Sane fractiones, quæ ſuper duobus terminis intermediis notari debent, juxta utramque regulam, ſunt 1 : 3, 1 : 3. Itaque, pro utroque termino, neceſſe eſt, ut triens quadrati ſui coefficientis major ſit producto ex coefficientibus terminorum, utrinque jacentium. Plane vero id ita ſe habet, relate ad ſecundum, ſed non item relate ad tertium. Quare illi quidem ſignum +, iſti vero ſignum — ſubſcribi debet. Unde, quia, ſubſcripto ſigno +, tam primo, quam ultimo termino, reperiuntur duæ variationes ſignorum, & una continuatio; indicio id nobis eſſe debet, in æquatione propoſita unam tantum dari radicem realem, & alias duas imaginarias eſſe.

CAPUT V.

Varii æquationes trasformandi modi.

548. Reliquum jam eſt, ut de æquationum transformationibus differamus. Transformari autem dicitur æquatio aliqua, quum in aliam mutatur ejuſdem gradus, cu-

cujus radices habeant datam quandam relationem cum radicibus prioris: adeo nempe, ut, cognitis radicibus unius, innotescant etiam radices alterius. Hujusmodi æquationum transformatio, quæ multifariam fieri potest, varios nobis suppetit usus, tum ad præparandas, ac reducendas, cum item ad resolvendas æquationes. Unde, velut rem maximi momenti, visum est, illam seorsim hoc capite prosequi.

I. Transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione.

549. ÆQuationes transformari possunt primo loco additione, & subtractione: nimirum, augendo, & minuendo radices æquationis, data aliqua quantitate. Fiunt autem transformationes istæ, subrogando in locum incognitæ, in æquatione contentæ, incognitam aliam, auctam, vel diminutam data illa quantitate; hoc est auctam, ubi radices ea sunt diminuendæ; & diminutam, ubi vicissim sunt augendæ.

550. Ut, si augere velim numero ternario radices hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ sunt 2, 3, & 4; pono $x + 3 = y$, scriboque in ea $y - 3$ pro x, $y^2 - 6y + 9$ pro x^2, & $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$ pro x^3. Jamque, his substitutionibus peractis, prodibit loco ejus hæc altera $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$, cujus radices sunt 5, 6, & 7; hoc est illæ eædem, quæ ad priorem æquationem referuntur, auctæ numero ternario.

551. Similiter, si minuere oporteat numero binario radices hujus æquationis $x^3 - 12x^2 +$

$47x - 60 = 0$, quæ ſunt 3, 4, & 5; pono $x - 2 = y$, ſcriboque in ea $y + 2$ pro x; $y^2 + 4y + 4$ pro x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ pro x^3. Jamque, has ſubſtitutiones peragendo, orietur loco ejus hæc alia $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$, cujus radices ſunt 1, 2, & 3; hoc eſt illæ eædem, quæ ad priorem æquationem pertinent, diminutæ numero binario.

552. Jam, augendo hac ratione radices alicujus æquationis, perſpicuum eſt, quod, ſi in ea radices ſint, partim poſitivæ, partim negativæ, poſitivæ quidem augentur, negativæ vero minuuntur eadem quantitate. Sic in æquatione iſta $x^2 + 4x - 12 = 0$, cujus una radix eſt 2, altera -6, ſi velim augere numero ternario radices ipſius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 - 2y - 15 = 0$, in qua una radix eſt 5, altera -3.

553. Id vero mirum cenſeri non debet. Nam quantitates negativæ, per additionem aliarum poſitivarum, minuuntur, & non augentur. Sed, augendo radices æquationis data aliqua quantitate, poteſt etiam una ex radicibus negativis prorſus evaneſcere: nimirum, ſi data illa quantitas aliquam ex radicibus negativis adæquet. Et, ſi quantitas, qua augendæ ſunt radices æquationis, fuerit major una radicum negativarum; tunc radix illa ex negativa fiet poſitiva.

554. Hinc, ſi quantitas, qua augentur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum negativarum; tunc omnes illæ radices fient poſitivæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio propoſita, ſigna +, & − alternatim habebunt. Unde viciſſim, ſi, augendo radices alicujus æquationis, alia oriatur, cujus ter-

termini habeant alternatim signa +, & —; tunc certum erit, quantitatem illam, qua augentur, uuamquamque radicum negativarum excedere. Atque hac ratione perspicuum est, nullo negotio cognosci posse, intra quem limitem radices negativæ alicujus æquationis consistant.

555. Vicissim autem, minuendo radices æquationis data aliqua quantitate, perspicuum est, quod, si æquatio radices admittat, partim positivas, partim negativas, positivæ quidem minuuntur, negativæ vero augentur eadem quantitate. Sic in æquatione ista $x^2 - 2x - 15 = 0$, cujus una radix est 5, altera -3, si velim minuere numero ternario radices ipsius, mutabitur ea in hanc aliam $y^2 + 4y - 12 = 0$, in qua una radix est 2, altera -6.

556. Quod rursus nec etiam mirum videri debet. Nam quantitates negativæ, per subductionem aliarum positivarum, augentur, & non minuuntur. Sed, minuendo radices æquationis data aliqua quantitate, fieri potest, ut una ex radicibus positivis prorsus evanescat: nimirum, si data illa quantitas aliquam ex radicibus positivis adæquet. Et, si quantitas, qua minuendæ sunt radices æquationis, fuerit major una radicum positivarum; tunc radix illa ex positiva fiet negativa.

557. Hinc, si quantitas, qua minuuntur radices æquationis, fuerit major unaquaque radicum positivarum; tunc omnes illæ radices fient negativæ, & termini illius, in quam mutatur æquatio, omnes afficientur signo +. Unde vicissim, si, minuendo radices æquationis, alia oriatur, cujus termini omnes afficiantur signo +;

tunc

tunc certum erit, quantitatem illam, qua minuuntur, unamquamque radicum positivarum excedere. Atque hac ratione perspicuum est, nullo negotio cognosci posse, intra quem limitem radices positivæ alicujus æquationis consistant.

558. Cæterum his transformationibus affinis est illa, per quam æquatio data mutatur in aliam, cujus radices sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo ex data quantitate radices illius. Perficitur autem transformatio ista, subrogando in locum incognitæ, in æquatione contentæ, datam illam quantitatem, diminutam incognita alia. Ut, si fuerit æquatio $x^2 - 3x + 2 = 0$, cujus radices duæ sunt 1, & 2, ponaturque in ea $5 - y$ loco x, & $25 - 10y + y^2$ loco x^2; orietur hæc altera $y^2 - 7y + 12 = 0$, cujus radices sunt 4, & 3; hoc est $5 - 1$, & $5 - 2$.

559. Quum autem in hunc modum transformatur æquatio, liquet primo, quod, si quantitas data sit positiva, eademque major unaquaque radicum positivarum, omnes novæ æquationis radices positivæ oriuntur. Ita hujus æquationis $x^3 - 19x + 30 = 0$ radices tres sunt 2, 3, & -5. Plane vero, si loco x ponatur $4 - y$, loco x^2 ponatur $16 - 8y + y^2$, & loco x^3 scribatur $64 - 48y + 12y^2 - y^3$; habebitur hæc alia æquatio $y^3 - 12y^2 + 29y - 18 = 0$, cujus omnes radices sunt positivæ.

560. Liquet secundo, quod, si quantitas data sit negativa, eademque major unaquaque radicum negativarum, omnes novæ æquationis radices negativæ oriuntur. Ita hujus æquationis $x^3 - 19x - 30 = 0$ radices tres sunt -2,

-3,

-3, & 5. Profecto autem, si scribatur $-4-y$ loco x, $16+8y+y^2$ loco x^2, & $-64-48y-12y^2-y^3$ loco x^3; orietur hæc altera æquatio $y^3+12y^2+29y+18=0$, cujus omnes radices sunt negativæ.

561. Hinc vicissim, si habeatur æquatio aliqua, & transformata ea in hunc modum per quantitatem aliquam positivam, oriantur positivæ omnes novæ æquationis radices; erit quantitas illa positiva major unaquaque radicum positivarum prioris æquationis. Atque ita quoque, si fuerit æquatio aliqua, quæ transformata in hunc modum per quantitatem aliam negativam efficiat, ut omnes novæ æquationis radices sint negativæ; erit quantitas illa negativa major unaquaque radicum negativarum prioris æquationis.

562. Jam fient positivæ omnes æquationis radices, si capiatur maximus coefficiens negativus, qui in æquatione reperitur, isque positivus, ac saltem unitate auctus, statuatur pro quantitate, ex qua radices æquationis sunt subtrahendæ. Ut, si fuerit æquatio $x^3-2x^2-4x+6=0$, quia in ea maximus coefficiens negativus est 4, fiat $x=5-y$; &, debita substitutione peracta, orietur æquatio $y^3-13y^2+51y-61=0$, cujus radices omnes sunt positivæ.

563. Per contrarium vero fient negativæ omnes æquationis radices, si capiatur maximus coefficiens positivus, qui in æquatione reperitur, isque negativus, ac saltem unitate minutus, statuatur pro quantitate, ex qua subtrahi debent radices æquationis. Ut, si fuerit æquatio $x^3+5x^2-4x+7=0$, quia in ea maximus coefficiens positivus est 7, fiat $x=-8-y$; & le-

& legitima subſtitutione peracta, emerget æquatio $y^3 + 19y^2 + 108y + 153 = 0$, cujus radices omnes ſunt negativæ.

II. *Obſervationes circa traditas æquationum transformationes.*

564. QUum æquationes, quæ traditis rationibus transformari debent, ſunt altioris gradus; nemo non videt, calculi laborem immenſum eſſe, tædioque affici, vel etiam eum, qui maxime in calculo verſatus eſt. Eſſet igitur optandum, ut labor ille minui poſſet, & ut ex data æquatione confeſtim novam eruere liceret. Verum, qua fieri id queat ratione, non adhuc vulgares Algebriſtæ in ſuis Algebræ Elementis docuerunt.

565. Ut ergo methodus rem aſſequendi intelligatur, ſit æquatio quarti gradus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, & augeri debeant radices ejus quantitate cognita a. Ad id præſtandum, jam quidem neceſſe eſt *, ponere $y - a$ loco x, $y^2 - 2ay + a^2$ loco x^2, $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3$ loco x^3, & $y^4 - 4ay^3 + 6a^2y^2 - 4a^3y + a^4$ loco x^4. Plane vero, ſubſtitutionibus hiſce peractis, loco propoſitæ æquationis, habebitur hæc alia $y^4 + (p - 4a)y^3 + (q - 3pa + 6a^2)y^2 + (r - 2qa + 3pa^2 - 4a^3)y + (s - ra + qa^2 - pa^3 + a^4) = 0$.

* art. 549.

566. Videamus itaque, num coefficientes novæ hujus æquationis ex æquatione data erui poſſint. Et quidem, jamdudum innotuit Algebriſtis, coefficientem ultimi termini, , ſive ipſum ultimum terminum $s - ra + qa^2 - pa^3 + a^4$

a^4 haberi, si in terminis propositæ æquationis $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ ponatur loco x quantitas cognita $-a$; quum, ope hujus substitutionis, summa eorum terminorum fiat $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s$, qui est ultimus terminus novæ æquationis. Sed, præter istud, nihil amplius in hac re eis innotuit.

567. Interim observare ulterius licebit. Primo, quod, si partes ejus ultimi termini $s - ra + qa^2 - pa^3 + a^4$ multiplicentur per dimensiones, quas in iis habet quantitas a, & productum dividatur per $-a$; habetur, velut quotiens, $r - 2qa + 3pa^2 - 4a^3$, qui est coefficiens termini quarti. Unde, sicuti ex æquatione data facillime deducitur ultimus terminus novæ æquationis; sic ex isto nullo negotio erui poterit coefficiens quarti.

568. Secundo, quod, si partes coefficientis quarti termini $r - 2qa + 3pa^2 - 4a^3$ multiplicentur per dimensiones, ad quas in iis ascendit quantitas a, & productum dividatur per duplum ipsius $-a$, nimirum per $-2a$; habetur, velut quotiens, $q - 3pa + 6a^2$, qui est coefficiens termini tertii. Unde, cognito coefficiente quarti termini, jam ex eo eruere licebit coefficientem tertii.

569. Ac tertio demum, quod, si partes coefficientis tertii termini $q - 3pa + 6a^2$ multiplicentur per dimensiones, ad quas in iis assurgit quantitas a, & productum dividatur per triplum ipsius $-a$, nimirum per $-3a$; habetur, velut quotiens, $p - 4a$, qui est coefficiens secundi termini. Quare, cognito coefficiente tertii termini, jam exinde erui poterit coefficiens secundi.

570. Quod autem obtinet in hoc exemplo, locum etiam habebit in omnibus aliis. Unde, hac ratione, quum radices alicujus æquationis augendæ sunt data quantitate, facile erit, novam æquationem invenire. Ita, si habeatur æquatio quinti gradus $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, & radices ejus augendæ sint quantitate cognita a; fiet $y^5 + (p - 5a) y^4 + (q - 4pa + 10a^2) y^3 + (r - 3qa + 6pa^2 - 10a^3) y^2 + (s - 2ra + 3qa^2 - 4pa^3 + 5a^4) y + (t - sa + ra^2 - qa^3 + pa^4 - a^5) = 0$ æquatio nova.

571. Nam primo, substituendo $-a$ loco x in terminis propositæ æquationis $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$, habetur $-a^5 + pa^4 - qa^3 + ra^2 - sa + t$; secundo, multiplicatis partibus hujus per dimensiones ipsius a, & divisis iisdem per $-a$, oritur $+ 5a^4 - 4pa^3 + 3qa^2 - 2ra + s$; tertio, multiplicando partes hujus per dimensiones ipsius a, & dividendo easdem per $-2a$, emergit $- 10a^3 + 6pa^2 - 3qa + r$; tertio, ductis istius partibus in dimensiones ipsius a, & divisis iisdem per $-3a$, prodit $+ 10a^2 - 4pa + q$; ac denique, si istius partes multiplicentur per dimensiones ipsius a, & dividantur eædem per $-4a$, habebitur $- 5a + p$.

572. Non dissimiliter operatio contrahi poterit, ubi radices alicujus æquationis minuendæ sunt data aliqua quantitate. Neque enim aliud discriminis intercedit, quam quod hic in terminis datæ æquationis loco incognitæ poni debet quantitas data, positive sumpta; pariterque divisiones per eandem datam quantitatem, positive sumptam, sunt peragendæ. Unde, si æ-

si æquatio data sit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, & radices ejus minui debeant quantitate cognita a; fiet $y^4 + (p + 4a)y^3 + (q + 3pa + 6a^2)y^2 + (r + 2qa + 3pa^2 + 4a^3)\ y + (s + ra + qa^2 + pa^3 + a^4) = 0$ æquatio nova.

573. Nam primo, scribendo a loco x in terminis propositæ æquationis $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, habetur $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s$; deinde, multiplicando partes hujus per dimensiones ipsius a, easdemque dividendo per a, producitur $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r$; ad hæc, si hujus partes ducantur in dimensiones ipsius a, & dividantur eædem per $2a$, oritur $6a^2 + 3pa + q$; ac denique, multiplicatis partibus istius per dimensiones ejusdem a, & divisis iisdem per $3a$, prodit $4a + p$.

574. Eadem ratione, si fuerit æquatio quinti gradus $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, ejusque radices minuendæ sint quantitate cognita a, fiet æquatio nova $y^5 + (p + 5a)y^4 + (q + 4pa + 10a^2)y^3 + (r + 3qa + 6pa^2 + 10a^3)y^2 + (s + 2ra + 3qa^2 + 4pa^3 + 5a^4)y^2 + (t + sa + ra^2 + qa^3 + pa^4 + a^5) = 0$. Atque ita quoque, si habeatur æquatio tertii gradus $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, & ejus radices minui debeant quantitate cognita a; erit nova æquatio $y^3 + (p + 3a)y^2 + (q + 2pa + 3a^2)y + (r + qa + pa^2 + a^3) = 0$.

575. Quid vero factu est opus, ubi sic transformari debet æquatio, ut radices novæ æquationis sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo ex data quantitate radices illius; nec etiam difficile erit definire. Plane enim, ad habendum ultimum terminum, satis erit, in terminis propo-

sitæ æquationis loco incognitæ substituere datam quantitatem, & sumere summam terminorum sub signo proprio, ubi gradus æquationis est par; & sub signo mutato, ubi vicissim est impar. Ad eruendos autem alios terminos, eadem adhuc methodus locum habet: nimirum divisiones instituendæ sunt per multiplices quantitatis datæ, positive sumptæ, ubi ea est negativa; sumptæ vero negative, ubi per contrarium quantitas illa est positiva.

576. Hoc pacto, si $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ sit æquatio proposita, & a quantitas, qua debet transformari, fiet $y^4 - (p - 4a)y^3 + (q + 3pa + 6a^2)y^2 - (r - 2qa - 3pa^2 - 4a^3)y + (s + ra + qa^2 + pa^3 + a^4) = 0$ æquatio nova. Sed, si existente a quantitate, qua perficienda est transformatio, æquatio fuerit $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; tunc æquatio nova prodibit $y^3 - (p - 3a)y^2 + (q + 2pa + 3a^2)y - (r - qa - pa^2 - a^3) = 0$.

577. Similiter, si $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ sit æquatio proposita, & $-a$ quantitas, qua debet transformari, fiet $y^4 - (p + 4a)y^3 + (q - 3pa + 6a^2)y^2 - (r + 2qa - 3pa^2 + 4a^3)y + (s - ra + qa^2 - pa^3 + a^4) = 0$ æquatio nova. Sed, si existente $-a$ quantitate, qua transformatio est peragenda, æquatio fuerit $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; tunc æquatio nova orietur $y^3 - (p + 3a)y^2 + (q - 2pa + 3a^2)y - (r + qa - pa^2 + a^3) = 0$.

II. Qua

II. *Qua ratione tolli possit, tum secundus, cum quilibet alius terminus æquationis.*

578. TRansformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione, hoc est, augendo, & minuendo radices æquationis data aliqua quantitate, usui nobis esse possunt ad tollendum secundum terminum ex quavis æquatione. Neque enim aliud fieri debet, quam radices datæ æquationis augere ea parte coefficientis secundi termini, quam gradus æquationis ostendit, ubi secundus terminus afficitur signo $+$; & minuere eadem illa parte, ubi per contrarium afficitur signo $-$.

579. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 + 4x - 8 = 0$; & oporteat, eam in aliam transformare, in qua secundus terminus deficiat. Quoniam æquatio est secundi gradus, & secundus terminus afficitur signo $+$; augeantur radices ejus numero binario, hoc est semisse coefficientis secundi termini: scribendo nempe $y - 2$ loco x, & $y^2 - 4y + 4$ loco x^2. Jamque nova orietur æquatio $y^2 - 12 = 0$, ubi secundus terminus deest. Sed, si æquatio sit $x^2 - 4x - 8 = 0$; tunc radices ejus minuendæ erunt numero binario, & habebitur loco ejus $y^2 - 12 = 0$.

580. Proponatur similiter æquatio $x^3 - 6x^2 - 16x + 86 = 0$; & transmutanda sit ea in aliam, in qua secundus terminus desit. Quoniam æquatio est tertii gradus, & secundus terminus afficitur signo $-$; minuantur radices ejus numero binario, sive triente coefficientis secundi termini: ponendo nempe $y + 2$ loco x, $y^2 + 4y$

$+ 4$ loco x^2, & $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$ loco x^3. Et hunc in modum nova emerget æquatio $y^3 - 28y + 38 = 0$, secundo termino carens. Sed, si æquatio sit $x^3 + 6x^2 - 16x + 86 = 0$; tunc ejus radices augendæ erunt numero ternario: qua ratione habebitur $y^3 - 28y + 134 = 0$.

581. Proponatur adhuc æquatio $x^4 + 16x^3 + 71x^2 - 4x - 420 = 0$, & transmutari ea debeat in aliam, quæ secundo termino careat. Æquatio ista est quarti gradus, & in ipsa secundus terminus afficitur signo $+$. Itaque radices ejus augendæ sunt numero quaternario, seu quadrante coefficientis secundi termini. Id vero si fiat, habebitur loco ejus hæc alia æquatio $y^4 - 25y^2 - 60y - 36 = 0$, in qua, non modo radices auctæ reperiuntur numero quaternario, verum etiam secundus terminus deest.

582. Hujus regulæ rationem adscribere, superfluum puto; quum nemo sit, qui illam non percipiat. Potius notandum hoc loco existimo, quod secundus æquationis terminus auferri etiam potest, si ex parte sui coefficientis, quam gradus æquationis ostendit, sumpta sub signo contrario ei, quod habet in æquatione, auferantur radices ipsius æquationis. Nam ex æquatione, exempli gratia, $x^2 + 4x - 8 = 0$ non minus tollitur secundus terminus, si fiat $x = y - 2$, quam si ponatur $x = - 2 - y$. Et similiter ex æquatione $x^2 - 4x - 8 = 0$ aufertur secundus terminus, ponendo, tam $x = y + 2$, quam $x = 2 - y$.

* art. 578. 583. Cæterum regula, mox * tradita, usui nobis esse potest dumtaxat, quum in æquatione secundus terminus tolli debet. Quod si vero au-

fe-

ferendus sit alius quilibet ex terminis intermediis; tunc commode id fiet, ipsa analysi adhibita. Plane enim ad hoc opus semper radices æquationis data aliqua quantitate sunt augendæ, vel minuendæ. Sed, quæ esse debet quantitas ista, ubi quemcumque alium terminum oportet auferre; determinari id poterit, assumendo illam indefinite, & faciendo, ut per eam evanescat terminus assignatus.

584. Id ut clarius intelligatur, dabimus primo hujus methodi specimen, quum ipse terminus secundus ex æquatione tolli debet. Oporteat igitur, ex æquatione ista $x^2 - ax + b^2 = 0$ secundum terminum auferre. Fiat $x = y + m$, vel etiam $x = y - m$. Parum enim refert, quo signo ponatur affecta quantitas illa indeterminata, qua transformari debet æquatio. Nam id ipsum innotescet etiam eadem illa analysi, per quam quantitas determinatur.

585. In proposita igitur æquatione $x^2 - ax + b^2 = 0$ ponatur $y + m$ loco x, & $y^2 + 2my + m^2$ loco x^2. Jamque, vice ejus, habebitur hæc alia æquatio $y^2 + (2m - a)y + (m^2 - am + b^2) = 0$. Quia vero transformatione ista evanescere debet secundus terminus; fiet coefficiens ejus $2m - a = 0$. Quumque ex hac æquatione eruatur $m = a : 2$; liquet, ex æquatione proposita tolli secundum terminum, si radices ejus minuantur semisse coefficientis illius termini.

586. Oporteat similiter, ex æquatione ista $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ secundum terminum tollere. Scribatur quoque in ea $y + m$ loco x, $y^2 + 2my + m^2$ loco x^2, & $y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$ loco x^3. Et, vice ejus, habebitur hæc

alia $y^3 + (3m + a)y^2 + (3m^2 + 2am - a^2)y + (m^3 + am^2 - a^2m - ab^2) = 0$. Quia vero hic secundus terminus deesse debet; erit coefficiens ejus $3m + a = 0$: proindeque, quum fiat $m = -a : 3$; liquet, radices propositæ æquationis augendas esse triente coefficientis secundi termini.

587. Sed experiamur modo eandem methodum, quum alius quilibet terminus ex æquatione tolli debet. Itaque oporteat, ex eadem æquatione $x^3 + ax^2 - a^2x - ab^2 = 0$ auferre terminum tertium. Plane ea, *in quam ipsa transmutatur, ponendo $x = y + m$, ut modo * vidimus, est $y^3 + (3m + a)y^2 + (3m^2 + 2am - a^2)y + (m^3 + am^2 - a^2m - ab^2) = 0$. Quare, evanescente tertio termino, fiet coefficiens ejus $3m^2 + 2am - a^2 = 0$. Unde, quum fit $m^2 + 2am : 3 = a^2 : 3$, resolutione hujus quadratæ æquationis, definietur valor ipsius m.

* art. 586.

588. Nihilo secus tolletur per analysim quartus terminus ex ista æquatione $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^2bx + a^4 = 0$. Ponendo enim $x = y + m$, & scribendo in ipsa æquatione potestates ipsius $y + m$ loco affinium potestatum ipsius x; habetur $y^4 + (4m - a)y^3 + (6m^2 - 3am + a^2)y^2 + (4m^3 - 3am^2 + 2a^2m - a^2b)y + (m^4 - am^3 + a^2m^2 - a^2bm + a^4) = 0$. Unde, evanescente quarto termino, fiet coefficiens ejus $4m^3 - 3am^2 + 2a^2m - a^2b = 0$; adeoque, quum fit $m^3 - 3am^2 : 4 + a^2m : 2 = a^2b : 4$, resolutione cubicæ hujus æquationis determinabitur valor ipsius m.

589. Hæc vero quum ita fint, liquet, quod, sicuti ad determinandam quantitatem, qua æ-

qua-

quatio proposita debet transformari, ut ejus secundus terminus evanescat, resolvenda est æquatio primi gradus; ita, pro determinatione ejusdem quantitatis, resolvere oportet æquationem secundi gradus, ubi tollendus est terminus tertius; æquationem tertii gradus, ubi tollendus est terminus quartus; atque ita deinceps: adeo, ut gradum resolvendæ æquationis ostendet ipse locus, quem occupat in æquatione tollendus terminus, unitate una minutus.

590. Hinc, quia in omni æquatione numerus terminorum designatur ab ipso ejus gradu, aucto unitate una; perspicuum est, ad tollendum ultimum terminum ex data quacumque æquatione, resolvendam esse æquationem, quæ sit ejusdem gradus cum æquatione proposita. Sed eædem æquationes nec etiam a se mutuo differunt. Jam enim notavimus supra *, quod si, *art. 566. exempli gratia, in hac æquatione $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ ponendum esset $y + m$ loco x; ultimus terminus ejus, in quam illa transformatur, est quantitas, quæ prodit, substituendo in terminis æquationis m loco x. Itaque, facta hac substitutione, erit $m^4 + pm^3 + qm^2 + rm + s$ ultimus terminus: proindeque æquatio resolvenda erit $m^4 + pm^3 + qm^2 + rm + s = 0$, quam, liquet, eandem esse cum ipsa æquatione proposita.

591. Neque vero obscura est hujus rei ratio. Ut enim ex aliqua æquatione ultimus terminus tolli possit, necesse est radices ejus, vel augere quantitate, quæ unam radicum negativarum adæquet; vel etiam minuere quantitate, quæ æqualis sit uni radicum positivarum. Utroque

*art.553. 556. que etenim casu evanescet * radix illa, quam talis quantitas adæquat.; adeoque in nihilum *art.440. etiam abibit ultimus terminus, qui * productum continet ex radicibus omnibus. Itaque, ut determinetur ea quantitas, qua augendæ sunt, vel minuendæ radices æquationes, quo ultimus ejus terminus evanescat; necesse est, ipsas propositæ æquationis radices invenire: quæ sane inveniri non possunt, nisi ejusdem illius æquationis resolutione.

592. Cæterum, quemadmodum secundus *art.582. terminus*, ita & quilibet alius ex terminis intermediis tolli potest ea æquationes transformandi ratione, per quam æquatio proposita abit in aliam; cujus radices sint residua, quæ oriuntur, subducendo ex data quantitate radices illius. Quæ autem esse debet quantitas illa, per quam subinde æquationem transformare oportet, determinari poterit, ope analysis, methodo non dissimili: nimirum, capiendo eam indefinite, & faciendo, ut ope ejus assignatus terminus evanescat. Quod sufficiat hic indicasse; quum res majore explicatione non egeat.

IV. *Transformationes æquationum, quæ fiunt multiplicatione, & divisione.*

593. QUemadmodum æquationes transformantur additione, & subtractione, hoc est augendo, & minuendo radices ipsarum data aliqua quantitate; sic pariter transformare eas licebit multiplicatione, & divisione, hoc est multiplicando, & dividendo easdem radices per datam quamvis quantitatem. Fiunt au-

autem hujusmodi transformationes, ubi in æquatione proposita, loco incognitæ, substituitur incognita alia, vel divisa, vel multiplicata per datam illam quantitatem: nimirum divisa, quum transformatio fieri debet multiplicatione; multiplicata vero, quum vicissim divisione est peragenda.

594. Oporteat, exempli gratia, radices hujus æquationis $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, quæ sunt 2, 3, & 4 multiplicare per 2, ita, ut evadant 4, 6, & 8. Sane, quum illarum unaquæque designetur per x, designabit $2x$ unamquamque istarum. Fiat itaque $2x = y$, sive $x = y : 2$; & ponatur $y : 2$ loco x, $y^2 : 4$ loco x^2, & $y^3 : 8$ loco x^3. Mutabitur ergo, substitutionibus hisce, æquatio proposita in hanc aliam $y^3 : 8 - 9y^2 : 4 + 26y : 2 - 24 = 0$, sive etiam $y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0$. Et profecto hujus radices sunt 4, 6, & 8.

595. Oporteat vicissim, radices hujus æquationis $y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0$, quæ jam sunt 4, 6, & 8, dividere per 2, ita, ut rursus evadant 2, 3, & 4. Sane, quia illarum unaquæque designatur per y; exhibebit $y : 2$ unamquamque istarum. Itaque fiat $y : 2 = x$, sive $y = 2x$, & scribatur in æquatione proposita $2x$ loco y, $4x^2$ loco y^2, & $8x^3$ loco y^3. Habebitur ergo, ope harum substitutionum, hæc nova æquatio $8x^3 - 72x^2 + 208x - 192 = 0$; quæ, divisis terminis omnibus per 8, evadet $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$; jamque hujus radices sunt 2, 3, & 4.

596. Eadem igitur ratione, si radices hujus æquationis $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x - 10 = 0$ mul-

multiplicandæ essent per 3, scribere oporteret $y:3$ loco x, $y^2:9$ loco x^2, $y^3:27$ loco x^3, & $y^4:81$ loco x^4; & æquatio nova $y^4:81 - 3y^3:27 + 4y^2:9 - 6y:3 - 10 = 0$, sive $y^4 - 9y^3 + 36y^2 - 162y + 810 = 0$, radicibus suis, quæsito satisfaciet. Vicissim vero, si radices istius dividendæ essent per 3, oporteret, scribere $3x$ loco y, $9x^2$ loco y^2, $27x^3$ loco y^3, & $81x^4$ loco y^4; jamque nova æquatio $81x^4 - 243x^3 + 324x^2 - 486x + 810 = 0$, sive $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x - 10 = 0$, radicibus suis, quæsiti conditionem adimplebit.

597. Sed notetur hoc loco velim, eam, in quam mutatur æquatio proposita, quum ipsius radices per datam aliquam quantitatem oportet multiplicare, posse etiam inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substituta incognita alia, multiplicetur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps. Ut, si habeatur æquatio $x^3 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$, & radices ejus multiplicandæ sint per 2; satis erit, scribere y, y^2, y^3 pro x, x^2, x^3, & multiplicare secundum terminum per 2, tertium per 4, & ultimum per 8. Nam, quæ oritur æquatio $y^3 - 4y^2 + 16y - 48 = 0$, ea erit, in quam proposita transmutatur.

598. Hujus compendii ratio non melius intelligi potest, quam si paulo diligentius perpendatur operatio, quæ fieri debet in ea, de qua agitur, transformatione. Ut enim radices istius æquationis $x^3 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$ multiplicentur per 2; regula id quidem præscribit *, ut ponatur $y:2$ loco x, $y^2:4$ loco x^2, & $y^3:8$

* art. 593.

lo-

loco x^3. Plane vero, substitutionibus hisce peractis, producitur æquatio $y^3 : 8 - 2y^2 : 4 + 4y : 2 - 6 = 0$, cujus termini omnes multiplicandi sunt per 8, ut a fractionibus liberetur. Quare perinde erit, si positis y, y^2, y^3 loco x, x^2, x^3, multiplicetur terminus secundus per 2, terminus tertius per 4, & terminus ultimus per 8.

599. Non dissimiliter autem ea, in quam mutatur æquatio proposita, quum ipsius radices per datam aliquam quantitatem oportet dividedere, poterit inveniri, si loco incognitæ, in æquatione contentæ, substituta incognita alia, dividatur secundus terminus per ipsam datam quantitatem, per ejus quadratum terminus tertius, per cubum terminus quartus, atque ita deinceps. Ut, si habeatur æquatio $y^3 - 4y^2 + 16y - 48 = 0$, & radices ejus dividendæ sint per 2; satis erit, scribere x, x^2, x^3 loco y, y^2, y^3; & dividere secundum terminum per 2, tertium per 4, & ultimum per 8. Nam, quæ oritur æquatio $x^3 - 2x^2 + 4x - 6 = 0$, ea erit, in quam proposita transmutatur.

600. Atque hujus etiam compendii ratio non melius intelligi potest, quam si perpendatur paulo diligentius operatio, quæ fieri debet in ea transformatione, de qua est quæstio. Ut enim radices istius æquationis $y^3 - 4y^2 + 16y - 48 = 0$ dividantur per 2; regula id quidem exigit*, ut ponatur $2x$ loco y, $4x^2$ loco y^2, & $8x^3$ loco y^3. Plane vero, peractis hisce substitutionibus, producitur æquatio $8x^3 - 4 . 4x^2 + 16 . 2x - 48 = 0$, cujus termini omnes dividendi sunt per 8, ut maxima incognitæ potestas a cognitis separetur. Quare perinde erit, si positis *Art. 593.

x, x^2

x, x^2, x^3 loco y, y^2, y^3, dividatur terminus secundus per 2, terminus tertius per 4, & ultimus per 8.

601. Cæterum hisce transformationibus affinis est illa, per quam æquatio mutatur in aliam, cujus radices sint quotientes, qui oriuntur, dividendo datam quantitatem per radices illius, quæque peragitur, substituendo in æquatione proposita loco incognitæ id, quod oritur, dividendo datam illam quantitatem per incognitam aliam. Esto enim æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$, cujus radices sunt 2, & 3; & oporteat, eam mutare in aliam, cujus radices sint 6, & 4; hoc est quotientes, qui oriuntur, dividendo eundem numerum 12 per 2, & 3.

602. Sane, quum earum radicum unaquæque designetur per x, designabit $12 : x$ unamquamque istarum radicum. Fiat itaque $12 : x = y$. Et, sicuti, multiplicando per x, habetur $12 = xy$; ita, dividendo rursus per y, fiet $12 : y = x$. Ponatur ergo $12 : y$ loco x, & $144 : y^2$ loco x^2. Jamque, substitutionibus hisce, æquatio proposita $x^2 - 5x + 6 = 0$ mutabitur in hanc aliam $144 : y^2 - 60 : y + 6 = 0$. Hæc vero, sicuti, multiplicatis terminis omnibus per y^2, evadit $6y^2 - 60y + 144 = 0$; ita, divisis iisdem terminis per 6, fiet $y^2 - 10y + 24 = 0$. Et profecto æquationis hujus radices non aliæ sunt, quam 6, & 4.

603. Oporteat etiam, æquationem istam $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus radices sunt 2, 3, & 4, transformare in aliam, quæ pro suis radicibus habeat 12, 8, & 6; hoc est quotientes, qui oriuntur, dividendo 24 per

2, 3,

2, 3, & 4. Ponatur $24:y$ loco x, $576:y^2$ loco x^2, $13824:y^3$ loco x^3. Per hasce ergo substitutiones orietur nova æquatio $13824:y^3 - 5184:y^2 + 624:y - 24 = 0$, quæ, multiplicatis terminis omnibus per y^3, iisdemque divisis per 24, evadit $y^3 - 26y^2 + 216y - 576 = 0$. Plane vero æquationis hujus non aliæ sunt radices, quam 12, 8, & 6.

604. Ope hujus transformationis, perspicuum est, radices æquationis in alias abire, quæ reciprocam ipsarum servant rationem; adeoque maximam converti in minimam, & vicissim minimam in maximam. Sed, si radices alicujus æquationis in earum inversas mutari debeant, sumenda erit unitas pro quantitate illa, quæ dividi debet per unamquamque ex radicibus æquationis. Voco enim quantitates inversas, quæ designatæ ad instar fractionum, sibi ex contraria parte correspondent: quo sensu diximus alibi, seriem harmonicam ex inversione numerorum naturalium oriri.

605. Perspicuum est autem, quod, si æquatio transformanda ita perturbetur, ut ejus ultimus terminus evadat primus, penultimus secundus, atque ita deinceps; fiet ejus transformatio quæsita, multiplicando radices perturbatæ hujus æquationis per datam quantitatem. Ita in priore exemplo*, si loco $x^2 - 5x + 6 = 0$, scribatur $6x^2 - 5x + 1 = 0$, sive $x^2 - 5x:6 + 1:6 = 0$, & multiplicentur æquationis hujus radices per 12; habebitur $y^2 - 10y + 24 = 0$, quæ est æquatio*, in quam illa transformatur, ubi per ejus radices dividitur numerus 12. Unde, quid factu est opus, ut hæc æquationes transfor- *art. 601. *art. 602.

formandi ratio in summam contrahatur; haud difficile erit definire.

V. *Usus expositarum transformationum indicantur.*

606. Transformatio æquationum, quæ multiplicatione peragitur, usui nobis esse potest ad tollendas fractiones, quæ in terminorum coefficientibus quandoque occurrunt. Ut, si habeatur æquatio $x^3 - 2x^2 + 10x - 11 : 8 = 0$; multiplicando radices ejus per 2; habebitur, loco illius, hæc alia $y^3 - 4y^2 + 40y - 11 = 0$, libera ab omni fractione. Pariterque, si fuerit $x^3 - 3x^2 + 8x : 9 - 10 = 0$; multiplicando radices ejus per 3, orietur $y^3 - 9y^2 + 8y - 270 = 0$. Atque ita quoque, multiplicatis radicibus hujus æquationis $x^3 - 2x^2 : 3 + 4x - 2 = 0$ per 3, prodibit $y^3 - 2y^2 + 36y - 54 = 0$.

607. Neque aliter fit, si non una, sed plures fractiones occurrant in æquatione. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^3 - 3x^2 : 2 + 4x : 9 - 35 : 64 = 0$; & oporteat, eam in aliam transmutare, in qua coefficientes terminorum nullas fractiones involvant. Sane radices ejus multiplicandæ sunt, per 4 ad tollendam fractionem ultimi termini, per 3 ad tollendam fractionem tertii, & per 2 ad tollendam fractionem secundi. Quare, quia numeri 4, 3, & 2 invicem ducti dant 24; invenietur æquatio, immunis ab omni fractione, si propositæ æquationis radices multiplicentur per 24.

608. Transformationibus, quæ fiunt, tum mul-

multiplicatione, cum divisione, possunt quandoque tolli quantitates radicales, quæ forte in coefficientibus terminorum occurrunt. Ut, si habeatur æquatio $x^2 + 3x\sqrt{2} - 6 = 0$, & ipsius loco alia desideretur, in qua coefficientes terminorum nullas contineant radicales; obtinebitur id, si radices æquationis multiplicentur, aut dividantur per $\sqrt{2}$. Atque ita quoque, multiplicando, aut dividendo radices omnes hujus æquationis $x^3 - 2x^2\sqrt{3} - 15x + 9\sqrt{3} = 0$ per $\sqrt{3}$, alia loco ejus orietur, in qua nulla occurret quantitas radicalis.

609. Et quidem, hac operatione, facile semper erit, fractiones ex æquationibus tollere; quum non aliud requiratur, quam, ut denominator ejus fractionis sit quadratum, si existat in tertio termino; cubus, si in quarto; quadrato-quadratum, si in quinto; atque ita deinceps: id, quod facile erit efficere, non mutato valore fractionis, siquidem aliter esse contigerit. Sed radicales quantitates non semper exterminare licebit; quum non raro occurrat, ut id nulla ratione possit obtineri. Si enim proponatur æquatio $x^3 - 3x^2 - 4x + 6\sqrt{3} = 0$; nec multiplicando, nec dividendo radices ejus per $\sqrt{3}$, eliminabitur quantitas radicalis.

610. Ope illius transformationis, quæ divisione peragitur, hoc est dividendo radices æquationis per datam aliquam quantitatem, illud etiam potest obtineri, quod in examinandis æquationibus valde conducit, ut minuantur coefficientes, qui in æquationum terminis singulis occurrunt. Ut, si habeatur æquatio $x^3 - 9x^2 + 18x - 54 = 0$; dividendo radices ejus per

3, orietur hæc alia $y^3 - 3y^2 + 2y - 2 = 0$, quæ est paulo simplicior, si ad coefficientes terminorum attendas. Sed, quando demum id fieri possit absque eo, quod fractionibus detur locus; facile erit, ex dictis eruere.

611. Earundem transformationum ope, obtineri amplius potest, ut coefficiens alicujus termini æqualis oriatur alteri cuidam datæ quantiti. Ut, si habeatur æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, & ipsius loco quæratur alia, ubi coefficiens secundi termini sit 2; id quidem fieri potest, vel multiplicando radices æquationis per $2:3$, vel, quod idem est, dividendo eas per $3:2$; quum utroque casu oriatur $y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$. Et similiter, si fuerit $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, & efficiendum esset, ut coefficiens tertii termini sit 4; oporteret, radices æquationis, vel multiplicare per $\surd(4:9) = 2:3$, vel etiam dividere per $\surd(9:4) = 3:2$.

612. Sed hoc idem, adhibita analysi, obtineri quoque potest, ope earum transformationum, quæ fiunt additione, & subtractione. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 - 2x + 4 = 0$; & oporteat, eam transmutare in aliam, in qua coefficiens secundi termini sit $+4$. Fiat $x = y + m$, & scribatur in ipsa æquatione $y + m$ loco x, & $y^2 + 2my + m^2$ loco x^2. Habebitur ergo, vice illius, hæc alia $y^2 + (2m - 2)y + (m^2 - 2m + 4) = 0$: ubi faciendo, ut coefficiens secundi termini sit $+4$, erit $2m - 2 = 4$, atque adeo $m = 3$. Quare quæsito fiet satis, si radices propositæ æquationis minuantur numero ternario.

613. Quod si opus sit, eandem æquationem

x^2

$x^2 - 2x + 4 = 0$ mutare in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 7$; id fiet in hunc modum. Ultimus terminus ejus æquationis, quæ orta est ex ipsius transformatione, est $m^2 - 2m + 4$. Itaque, quia hic esse debet $+ 7$, fiet $m^2 - 2m + 4 = 7$, & $m^2 - 2m + 1 = 4$. Quare, extracta utrinque quadrata radice, erit, vel $m = 3$, vel $m = - 1$. Unde æquatio proposita mutabitur in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 7$, vel augendo unitate radices ejus, vel easdem minuendo numero ternario.

614. Analysi adhuc usurpata, licebit, id ipsum obtinere quoque ope ejus transformationis, per quam radices propositæ æquationis subtrahuntur ex data quantitate. Oporteat, exempli gratia, æquationem $x^2 - 5x + 8 = 0$ transformare in aliam, in qua coefficiens secundi termini sit $+ 9$. Fiat $y = m - x$, & scribatur in æquatione $m - y$ loco x, & $m^2 - 2my + y^2$ loco x^2. Habebitur ergo vice ejus hæc alia $y^2 - (5 - 2m) y + (8 - 5m + m^2) = 0$; ubi faciendo, ut coefficiens secundi termini sit $+ 9$, erit $- 5 - 2m = 9$, atque adeo $m = - 7$. Subtrahendo itaque radices propositæ æquationis ex $- 7$, prodibit æquatio alia, in qua erit $+ 9$ coefficiens secundi termini.

615. Oporteat quoque, eandem æquationem $x^2 - 5x + 8 = 0$ mutare in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 2$. Sane ultimus terminus ejus æquationis, quæ orta est ex ipsius transformatione, est $8 - 5m + m^2$. Itaque, quia hic esse debet $+ 2$, fiet $8 - 5m + m^2 = 2$, & $m^2 - 5m + 6 = 0$. Quare, addendo ad utramque hujus æquationis partem $1 : 4$, & extrahendo

hinc inde quadratam radicem; erit, tum $m - 5:2 = 1:2$, cum $m - 5:2 = -1:2$; & consequenter erit, vel $m = 3$, vel $m = 2$: proindeque æquatio proposita mutabitur in aliam, cujus ultimus terminus sit $+ 2$, subtrahendo radices ejus, vel ex numero binario, vel ex numero ternario.

616. Cæterum, quæcumque ad hoc opus transformandi ratio adhibeatur, liquet, quod ubi terminus, cujus coefficiens æqualis esse debet datæ quantitati, non est secundus, possunt semper in nova æquatione radicales quantitates occurrere. Sed non perinde res est, si coefficiens talis termini data quantitate major, aut minor esse debeat. Nam semper fieri potest, ut nova æquatio ab omni quantitate radicali sit immunis. Ut, si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0$ coefficiens tertii termini debeat esse, sive major, sive minor, quam 5: capiendo numerum quadratum, sive majorem, sive minorem, quam $5:3$; satis erit, multiplicare radices æquationis per latus ejus numeri quadrati.

617. Plane enim $9:4$ major est, quam $5:3$, & si utique radices ejus æquationis multiplicentur per $3:2$, orietur hæc alia $y^3 - 6y^2 + 27y:4 - 81:4 = 0$, in qua coefficiens tertii termini major est, quam 5. Atque ita quoque $25:16$ minor est, quam $5:3$: profecto autem, si radices ejusdem æquationis multiplicentur per $5:4$, prodibit hæc alia $y^3 - 5y^2 + 75y:16 - 375:32 = 0$, in qua coefficiens tertii termini minor est, quam 5.

SE-

SECTIO III.

De Reductione Æquationum ad Propriam Sedem.

618. Natura, & proprietatibus æquationum enodatis; sequitur modo, ut de earum ad propriam sedem reductione sermonem instituamus. Jam enim notavimus supra *, unamquamque æquationem tunc demum dicendam esse ejus gradus, ad quem elevata reperitur, ubi ad gradum inferiorem deprimi nequit. Plane vero, sicuti æquatio dati gradus dicitur esse in sua sede propria, quum gradus inferioris fieri nequit; ita per contrarium reducetur eadem ad sedem suam propriam, quum deprimitur ad eum gradum, ad quem natura sua deprimi potest. *art.318.

619. Hæc reductio æquationum ad propriam sedem usui nobis esse debet, ad cognoscenda genera problematum, unde eæ æquationes derivantur. Ut enim alibi * diximus, unumquodque problema ejus generis esse putandum est, quod suæ æquationis gradus ostendit. Unde, sicuti æquatio, ex problemate aliquo nata, quum non existit in sede sua propria, ad gradum inferiorem deprimi potest; ita ipsum problema ejus generis debet haberi, quod a depressa æquatione indicatur. *art.319.

620. Necesse est autem, genus problematis perspectum, ac exploratum habere; tum, ut il-

lud convenienter suæ naturæ resolvamus; tum etiam, ut suorum casuum multiplicitas cognita nobis evadat. Cujuscumque etenim problematis casus, saltem quum ipsum problema universaliter conceptum est, distinguuntur passim per radices æquationis, ad quam problema reducitur. Unde, non existente æquatione in sede sua propria, fient, tum ipsius æquationis multo plures radices, cum problematis, de quo agitur, multo plures casus, quam utriusqe natura requirit.

C A P U T I.

Æquationum sedes propria definita.

621. ETsi verissimum sit, æquationem dati gradus tunc demum existere in sede sua propria, ubi ad gradum inferiorem deprimi nequit; attamen notio ista, velut negativa, multum abest, ut quid per sedem propriam æquationis intelligendum sit, nobis aperiat. Curandum est igitur, ut rei hujus positiva notio nostro animo obversetur: & ea propter, priusquam methodum ostendamus reducendi æquationes ad sedem suam propriam, visum est, speciali capite paulo accuratius explicare, quando demum æquatio dicenda sit in sede sua propria reperiri: in quo etiam, data occasione, plura alia observabimus, non vulgaria, nec exigui usus in resolutione problematum.

I. Quomodo ex constitutione æquationis de sede ejus potest dijudicari.

622. DE sede propria alicujus æquationis, non aliter, quam ex ejus constitutione potest dijudicari. Jam enim omnibus æquationibus accidit *, ut consti- *art.399.
tuantur per mutuam multiplicationem æquationum simplicium, quæ suas continent radices. Plane vero, si eadem æquatio haberi quoque possit per unicam tantum harum æquationum: in quantum hæc, a radicalibus, quas forte continet, liberata, eandem illam nobis restituat; tunc in sede sua propria æquationem esse dicendum est.

623. Ita æquationis hujus $x^2 - 4x - 6 = 0$ radices duæ sunt $2 + \sqrt{10}$, & $2 - \sqrt{10}$; nec dubium esse potest, quin, multiplicando $x - 2 - \sqrt{10} = 0$ per $x - 2 + \sqrt{10} = 0$, ea oriatur æquatio. Sed in eandem æquationem incidimus quoque, si utraque harum æquationum simplicium a radicali, quam continet, reddatur immunis. Nam, translata ad partem alteram ea radicali; & factis hinc inde quadratis, utraque dabit $x^2 - 4x + 4 = 10$, sive $x^2 - 4x - 6 = 0$. Unde æquatio, de qua agitur, erit in sede sua propria.

624. Similiter æquationis hujus $x^4 - 4x^2 - 6 = 0$ radices quatuor sunt $+\sqrt{(2 + \sqrt{10})}$, $+\sqrt{(2 - \sqrt{10})}$, $-\sqrt{(2 + \sqrt{10})}$, $-\sqrt{(2 - \sqrt{10})}$; & si invicem ducantur quatuor istæ simplices æquationes $x - \sqrt{(2 + \sqrt{10})} = 0$, $x - \sqrt{(2 - \sqrt{10})} = 0$, $x + \sqrt{(2 + \sqrt{10})} = 0$, $x + \sqrt{(2 -$

 $\sqrt{10})$

$\sqrt{10} = 0$, nulli dubium esse potest, quin ea emergat æquatio. Quoniam autem eadem æquatio prodit quoque, si unaquæque istarum omnis omnino radicalis expers evadat; concludendum est, propositam equationem habere suam sedem propriam in eo gradu, ad quem jam elevata reperitur.

625. Non perinde vero se res habet de ista æquatione $x^2 - 5x + 6 = 0$. Istius enim radices sunt 2, & 3; eademque non aliter constitui potest, quam multiplicando $x - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$. Unde ea in sede sua propria nequaquam reperietur. Atque ita quoque nec item erit in sede sua propria æquatio ista $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Nam, sicuti hujus radices sunt 2, 3, & 4; ita ejusdem constitutio non aliter haberi potest, quam multiplicando per se invicem tres istas simplices æquationes $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$.

626. Interim haud quidem putandum est, existere æquationem aliquam in sede sua propria, ubi aliquæ ex ejus radices quantitates continent radicales. Plane enim æquationis hujus $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$ radices tres sunt $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, & 3. Neque vero, quod priores duæ sunt radicales, existit æquatio in sede sua propria. Nam utraque istarum æquationum $x - \sqrt{2} = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$, ab assymetris liberata, dat $x^2 - 2 = 0$; nec proposita æquatio haberi potest, nisi deinde multiplicetur $x^2 - 2 = 0$ per $x - 3 = 0$.

627. Sed nec etiam putandum est, æquationem in propria sua sede reperiri, ubi omnes ejus radices quantitatibus radicalibus sunt expres-

pressæ. Hujus namque æquationis $x^4 - 12x^2 + 35 = 0$ radices quatuor sunt $+\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $+\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$; adeoque omnes radicalibus exprimuntur. Verumtamen, si fiant æquationes simplices $x - \sqrt{5} = 0$, $x + \sqrt{5} = 0$, $x - \sqrt{7} = 0$, $x + \sqrt{7} = 0$, nulla istarum, ab assymetris vindicata, propositam æquationem restituet. Nam priores duæ dant $x^2 - 5 = 0$; duæ vero postremæ $x^2 - 7 = 0$. Et, nisi multiplicetur $x^2 - 5 = 0$ per $x^2 - 7 = 0$; æquatio, de qua agitur, minime prodibit.

628. Æquationem ergo, quæ sit plurium dimensionum, tunc quidem in sede sua propria existere putandum est, quotiescumque constitui potest, non modo per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ continent radices ejus, verum etiam per unicam tantum illarum æquationum. Sed, si talis habeatur æquatio, ut ea non aliter constitui possit, quam per multiplicationem mutuam aliarum inferioris gradus æquationum; tunc æquationem illam in propria sua sede nequaquam existere, dicendum est.

629. Ex exemplis autem, modo allatis, liquet, tripliciter contingere posse, ut æquatio plurium dimensionum in propria sua sede nequaquam existat. Primo, si omnes ejus radices sint commensurabiles, ac rationales. Secundo, si partim sint rationales, partim radicales. Et denique, si omnes sint radicales, sed sedes incommensurabilitatis non reperiatur in illo gradu, ad quem ascendit æquatio ipsa. Nam in singulis hisce casibus non aliter constituere licet æquationem, quam per multiplicationem mutuam alia-

aliarum æquationum, quæ sint gradus inferioris.

630. Unde etiam æquationes, quæ non existunt in propria sua sede, tripliciter componi possunt. Omnibus enim id accidit, ut non aliter constitui queant, quam multiplicando per se invicem æquationes alias gradus inferioris. Sed æquationum componentium, vel unaquæque simplex esse potest, vel nulla gaudet hac simplicitate, vel denique ex iis aliquæ simplices esse possunt, aliquæ vero non item. Ubi tamen notandum, quod simplicem nunc voco æquationem, in qua incognita, non modo est unius dimensionis, sed habet quoque valorem rationalem.

631. Neque vero omnes cujuscumque gradus æquationes, quæ non existunt in propria sua sede, componi possunt omnibus iis modis. Nam primo æquationes secundi gradus non aliter componi queunt, quam mutua duarum æquationum simplicium multiplicatione. Et secundo æquationes tertii gradus constitui possunt, vel per multiplicationem mutuam trium æquationum simplicium; vel etiam multiplicando æquationem secundi gradus, quæ existat in sede sua propria, per æquationem alteram simplicem, seu primi gradus.

632. Quantum ad alias altioris gradus æquationes, in iis quidem omnes tres illi componendi modi possunt locum habere. Æquatio namque quarti gradus, quæ non existit in sede sua propria, oriri potest; vel ex multiplicatione quatuor æquationum simplicium; vel multiplicando æquationem secundi gradus, quæ sit in propria sua sede, per alias duas æquationes simplices; vel multiplicando æquationem tertii

gra-

gradus, in propria sua sede existentem, per unicam tantum æquationem simplicem; vel denique multiplicando per se mutuo duas secundi gradus æquationes, quarum utraque in propria sua sede reperiatur.

II. *Theoriæ præcedentis illustratio; ubi de generalitate, & particularitate problematum.*

633. Quæ modo dicta sunt de sede propria æquationum, non omni difficultate vacant. Jam enim æquatio in sede sua propria nequaquam existit, ubi ea non aliter constitui potest, quam per multiplicationem mutuam aliarum æquationum gradus inferioris. Ubi igitur id accidit, ad inferiorem semper gradum æquationem deprimere licebit; ipsumque problema ejus generis esse dicendum est, quod ostendit æquatio depressa. Plane vero, si ita res esset, posset quandoque problema multo plures casus admittere, quam qui a radicibus suæ æquationis indicantur.

634. Quod ut exemplo aliquo clarius evadat, oporteat, invenire numerum, cujus quadratum, subductum ex 32, det tale residuum, ut, multiplicato residuo isto per eundem numerum, oriatur 24. Sane, vocando x numerum quæsitum, fiet $32 - x^2$ residuum, de quo agitur, adeoque, ob conditionem, in problemate appositam, habebitur æquatio $32x - x^3 = 24$, sive etiam $x^3 - 32x + 24 = 0$. Quia vero, divisa æquatione ista per $x + 6$, deprimitur ad $x^2 - 6x + 4 = 0$, quæ existit in sede sua propria, & est secundi gradus; ipsum etiam problema secun-

cundi generis esse dicendum est: proindeque, pro duplici dimensione, ad quam ascendit ejus æquatio, duas tantum solutiones deberet admittere.

635. Et quidem, quin duæ radices hujus æquationis $x^2 - 6x + 4 = 0$ problemati satisfaciant, nulli dubium esse potest. Sunt enim radices illæ $3 + \surd 5$, & $3 - \surd 5$; earumque quadrata $14 + 6\surd 5$, & $14 - 6\surd 5$: iis vero subductis ex 32, fiunt residua $18 - 6\surd 5$, & $18 + 6\surd 5$; &, multiplicando, sive $18 - 6\surd 5$ per $3 + \surd 5$, sive $18 + 6\surd 5$ per $3 - \surd 5$, semper oritur 24. Interim, præter duos illos numeros, est etiam tertius, qui satisfacit problemati: nimirum -6. Nam hujus quadratum 36 subductum ex 32 relinquit -4, qui ductus in -6, adhuc producit 24.

636. Jam alter hic numerus -6, per quem fit etiam problemati satis, est tertia radix primitivæ æquationis $x^3 - 32x + 24 = 0$, exinde detracta, ubi per binomium $x + 6$ divisa fuit. Nam, semper ac divisio prodiit exacta, omnino

*art. 406. necesse est *, ut sit $x + 6 = 0$, & consequenter $x = -6$. Id vero quum ita sit, duorum alterutrum fateamur oportet; vel nempe, ut æquatio problematis sit $x^3 - 32x + 24 = 0$, atque adeo, ut ea existat in sede sua propria; vel etiam, ut, per reductionem æquationis ad propriam suam sedem, non indicentur ab æquatione depressa omnes problematis casus.

637. Ut igitur huic difficultati obviam fiat, notare sedulo oportet, quod, ubi problema ita quidem particulariter proponitur, ut uni dumtaxat speciei sit aptatum; tunc non aliter de casibus

ſibus ejus debet dijudicari, quam evehendo illud ad ſuam univerſalitatem, & efficiendo, ut ad omnes omnino ſpecies poſſibiles ſe extendat. Quod ut rectius adhuc intelligatur, ſciendum eſt, unum idemque problema dupliciter proponi poſſe; vel nempe adeo particulariter, ut unam tantummodo ſpeciem reſpiciat; vel adeo univerſaliter, ut cunctas ſpecies, quæ fingi, excogitarique poſſunt, comprehendat.

638. Sic, querendo numesum, cujus quadratum, ſubductum ex 32, det tale reſiduum, ut, quod oritur, multiplicando reſiduum iſtud per eundem numerum, ſit 24; nemo non videt, problema particulariter proponi, ejuſque ſolutionem eam tantum, de qua agitur, ſpeciem reſpicere. Sed liquet quoque, idem problema fieri univerſale, & ſolutionem ejus ad omnes omnino ſpecies poſſibiles ſe extendere, ſi quæratur numerus, cujus quadratum, ſubductum ex quovis numero dato, det ejuſmodi reſiduum, ut, multiplicato reſiduo iſto per eundem numerum, alter quivis numerus datus oriatur.

639. Jam, quum quæſtio eſt de caſibus, quorum problema aliquod eſt capax, curandum eſt ſemper, ut ſua ei univerſalitas concilietur. Plane vero, ſoluto problemate ſecundum omnem ſuam extenſionem, & reducta ad propriam ſuam ſedem æquatione, quæ in ejus ſolutione invenitur; aſſerere licebit, problema tot præciſe caſus admittere, quot æquationis, ſubinde reductæ, gradus oſtendit. Sed, ſicuti, individuato problemate, ſive potius æquatione ejus generali, fieri quandoque poteſt, ut aliqui ex iis caſibus ſint impoſſibiles; ita evenire pariter poteſt,

test, ut ipsum problema evadat interdum generis inferioris.

640. Hac ratione, in allato problemate, ad suam universalitatem evecto, si vocetur x numerus quæsitus, & p numerus datus, unde ejus quadratum subtrahi debet; fiet $p - x^2$ residuum, de quo agitur; & $px - x^3$ id, quod oritur, multiplicando residuum istud per eundem numerum quæsitum. Quare, si dicatur q alter ille numerus datus, cui productum hujus multiplicationis æquale esse debet; orietur æquatio $px - x^3 = q$, sive etiam $x^3 - px + q = 0$, quæ quum sit in propria sua sede, nec deprimi possit, indicio nobis esse debet, problema, de quo agitur, tres casus admittere.

641. Quamcumq;ergo speciem problema respiciat, semper trium solutionum capax erit; nam omnes species, quæ fingi, excogitarique possunt, sub univesali ista æquatione $x^3 - px + q = 0$ continentur. Interim ex tribus hisce solutionibus, fieri quandoque potest, ut duæ evadant
* art. 510. impossibiles. Nam, ut alibi * vidimus, si contingat, ut quadratum ultimi termini dimidiati majus sit cubo, qui fit ex triente coefficientis termini tertii, positive sumpti; tunc duæ ex radicibus illius æquationis fient imaginariæ; & consequenter problema non aliam solutionem admittet, quam quæ ex radice reali proficiscitur.

642. Quemadmodum vero id evenit, quia realitas radicum dependet ex relationibus, quas coefficientes terminorum habent inter se mutuo; ita ex eodem capite fieri quoque potest, ut problema in aliqua specie non sit amplius tertii generis, sed vel secundi, vel etiam primi. Sic po-

ponendo $p = 32$, & $q = 24$; problema fit secundi generis, quia, ut vidimus paulo ante *, satisfaciunt quæsito tres numeri $3 + \surd 5$, $3 - \surd 5$, & $- 6$. Sed, si ponatur $p = 19$, & $q = 30$, problema evadet generis primi; quandoquidem fiet satis problemati per unumquemque trium horum numerorum 2, 3, & $- 5$. *art. 635.

643. Ut ergo rem in summam contrahamus, dicimus, casus alicujus problematis distinguendos esse a numero dimensionum ejus æquationis, ad quam ipsum problema, universaliter conceptum, revocatur. Ubi vero agitur de genere ejusdem problematis, dicimus, quod, quamcumque illud speciem respiciat, numquam altius attolli potest, quam generalis æquationis gradus ostendit; sed non ideo semper ejus generis debet haberi, quia fieri potest, ut in aliqua specie evadat generis inferioris: nempe, si, translata æquatione generali ad hanc speciem, ea ad gradum inferiorem deprimi queat.

644. Interim, quum problema generaliter proponitur, & quæritur genus ipsius; asserere licebit, ejus generis esse problema, quod generalis æquationis indicat gradus. Nam, etsi in aliquibus speciebus ea æquatio fieri possit gradus inferioris, id tamen asserti veritatem nequaquam evertit; quia species illæ habendæ sunt potius, velut exceptiones ejus asserti. Qua ratione problema de trisectione arcus, diximus superius *, esse tertii generis: licet æquatio, orta ex ejus solutione, deprimatur ad aliam secundi gradus, ubi angulus, tripartito secandus, est rectus. *art. 323.

645. Vocando etenim a radium, seu sinum totum, b sinum complementi anguli dati, & x

sinum

*Art.323. ſinum complementi anguli quæſiti ; reperitur * æquatio tertii gradus $x^3 - 3a^2x : 4 - a^2b : 4 = 0$, quæ in hac ejus univerſalitate deprimi nequit. Plane vero, ubi datus angulus eſt rectus; tunc, ſicuti habetur $a^2 = 2b^2$, ita eadem illa æquatio evadit $x^3 - 3b^2x : 2 - b^3 : 2 = 0$. Dividendo autem æquationem iſtam per binomium $x + b$; alia oritur ſecundi gradus $x^2 - bx - b^2 : 2 = 0$.

III. *Diſcrimen inter reductiones æquationum generalium, & ſpecialium.*

*Art.638. 646. QUod mox * diſcrimen fecimus inter problema generaliter conceptum, & idem determinatæ alicui ſpeciei aptatum ; abunde nobis oſtendit, aliud quidem obtineri, reductione æquationis generalis; aliud, reductione æquationum ſpecialium, quæ ſub generali illa, jam reducta, continentur. Per eam etenim detrahuntur radices inutiles, & quæ ad problema minime faciunt; per iſtam vero fit quidem radicum ſeparatio, ſed, etſi ſejunctæ a ſe invicem, adhuc tamen ad ſolutionem problematis ſingulæ conferunt.

647. Utut namq; problema generaliter concipiatur, accidit perſæpe, ut in ejus ſolutione una cum radicibus, quæ ſunt problematis propriæ, miſceantur aliæ, remotæ prorſus ab eo, quod quæritur. Id vero quum contingit, fieri plane nequit, ut æquatio, orta ex ſolutione problematis, exiſtat in ſede ſua propria ; quandoquidem ad eum gradum, in quo reperitur, nonniſi conſortio inutilium illarum radicum eſt evecta.

Un-

Unde, ficuti talis æquatio eft femper reductionis capax; ita, inftituta reductione, inutiles illæ radices detrahuntur, & ab aliis, plane proficuis, feparantur.

648. Et quidem, quod in invenienda æquatione problematis, generaliter concepti, una cum radicibus propriis, aliæ omnino inutiles mifceri queunt; facile quidem erit intelligere. Ponamus enim, æquationem problematis, natura fua, fubfiftere debere inter duas quantitates $x^2 + ax$, & b^2. Et nulli dubium effe poteft, quin fubfiftat etiam æquatio, fi earum quantitatum utraque multiplicata reperiatur, five per $x + c$, five per quodvis aliud polynomium, ex incognita x, & aliis quantitatibus cognitis compofitum. Itaque, fi contingat, in computu earum quantitatum, illas fubinde expreffas oriri; æquatio altius affurget, quam ejus natura patitur; adeoq; aliquæ ejus radices prorfus inutiles erunt.

649. Neque dicas, hunc cafum facile cognofci poffe, quærendo, fi quantitates illæ duæ, inter quas inftitui debet æqualitas, communem aliquem divifore admittant; atque adeo vitari, delendo, divifionis ope, eum divifore, & inftituendo æqualitatem inter quotientes, qui inde oriuntur. Nam primo communis divifor duarum quantitatum non eft adeo facilis inventu. Et deinde contingere quandoque poteft, ut quantitates, inter quas inftituenda eft æquatio, nullum habeant communem divifore; & tamen, ut adhuc in æquatione radices adfint inutiles.

650. Quod ut melius intelligatur, ponamus rurfus, æquationem, natura fua, fubfiftere

debere inter quantitates $x^2 + ax$, & b^2. Plane, multiplicata utraque quantitate per binomium $x + c$, subsistet etiam æquatio inter $x^3 + ax^2 + cx^2 + acx$, & $b^2x + b^2c$. Et, si utrinque auferatur b^2x, obtinebit pariter æquatio inter $x^3 + ax^2 + cx^2 + acx - b^2x$, & b^2c. Interim duæ istæ quantitates nullum habent divisorem communem. Quare, si inter eas instituatur æqualitas, prodibit æquatio $x^3 + ax^2 + cx^2 + acx - b^2x = b^2c$, ubi, una cum radicibus necessariis, alia miscetur prorsus inutilis.

651. Huc adde, quod, deleto per divisionem communi divisore quantitatum, inter quas subsistit æquatio, & instituta æqualitate inter quotientes, fieri quandoque potest, ut rejiciantur radices utiles, & solæ superfluæ maneant. Sic in eodem exemplo, si subsistit æquatio inter $x^3 + ax^2 + cx^2 + acx - b^2x$, & b^2c; subsistet etiam inter $x^3 + ax^2 - b^2x$, & $b^2c - acx - cx^2$. Plane vero duæ istæ quantitates pro communi earum divisore habent $x^2 + ax - b^2$, qui si utique, divisionis ope, deleatur, fient quotientes x, & $-c$. Instituta autem æqualitate inter quotientes istos, prodibit æquatio $x + c = 0$, quæ nonnisi radicem inutilem exhibet.

652. Jam, quod æquatio numquam existit in sede sua propria, ubi in ea, una cum radicibus, quæ sunt problematis propriæ, aliæ miscentur prorsus inutiles; abunde liquet ex dictis, & clarius adhuc constabit, si sedulo consideretur, quod, sicuti casuum omnium alicujus problematis eadem est lex, atque conditio; ita idem sit, oportet, calculus in casu unoquoque, & eadem pariter æquatio, quæ ex quoque ca-

casu suboritur. Hinc enim fit, ut, quicumque casus expendatur, æquatio, exinde orta, non modo radicem, quæ casui illi correspondet, verum etiam radices alias, quæ ad casus alios referuntur, complecti debeat, & indifferenter exhibere.

653. Id vero quum ita sit, omnino necesse est, ut consortio radicum inutilium non existat æquatio in sede sua propria. Quum enim casus, quibus inutiles illæ radices correspondent, ad problema non pertineant; utique eorum alia erit lex, alia conditio. Quare alius item erit calculus in iis; & alia etiam æquatio, quæ earundem radices exhibet. Plane vero, quemadmodum alia esse debet æquatio, quæ radices continet problematis proprias; & alia, quæ radices complectitur inutiles: ita putandum est, ex multiplicatione duarum istarum ortam esse eam, de qua agitur; nec proinde in sede sua propria eandem reperiri.

654. Atque hinc modo luce clarius apparet, quod, reductione æquationis generalis ad propriam sedem, detrahuntur radices inutiles, & quæ ad problema minime faciunt. Per eam namque reductionem separantur a se invicem duæ illæ æquationes, ex quarum multiplicatione ea, de qua agitur, orta est: adeoque una exhibebit radices, problematis proprias; altera comprehendet radices, omnino alienas a problemate. Sed non perinde res est in reductione æquationum specialium, quæ sub generali illa, jam reducta, continentur. Nam pro iis cujusque æquationum componentium radices ad solutionem problematis conferunt.

655. Interim, quum æquatio generalis per reductionem scinditur in duas illas, ex quibus componitur; non ita facile conjici potest, quænam æquationum componentium radices continet inutiles. Plane enim ea esse debet æquatio problematis propria, quæ omnia ejus data complectitur. Verum, quia data ista non aliter in æquatione discerni queunt, quam per quantitates cognitas, quæ occurrunt in problemate; nihil vetat, ut eædem in utraque æquatione quantitates cognitæ reperiantur.

656. Et sane, pro cognoscenda æquatione problematis propria, non alia tutior est methodus, quam, vel rei periculum facere, inquirendo, cujusnam æquationis radices problemati satisfaciunt; vel aliam viam inire, pro indaganda problematis æquatione. Nam fieri facile potest, ut, calculo aliter instituto, etiam alterius formæ æquatio oriatur; adeoque, instituta hujus reductione, fiet æquatio problematis propria, quæ ad utriusque compositionem peræque concurrit.

657. Id vero vitio Analysi verti non debet; sed potius adscribendum est oscitantiæ ipsius Analystæ, quatenus in æquationis inventione eam viam insistit, quæ primo ei sese offert, nec collocat operam, ut illam semitam eligat, quæ ad æquationem problematis propriam recta ipsum manuducit. Eæ enim æquationes inveniendi rationes, quæ leviore cura nobis sese offerunt, ut plurimum laborem satis molestum pariunt, tum in reducendis iis æquationibus, cum item in iisdem resolvendis. Unde juvat, relationes quantitatum, quæ in problemate occurrunt, usque

adeo

adeo diligenter evolvere, ut ſtatim æquatio prodeat talis, qualem natura problematis exigit.

658. Obtinebant id mire Veteres per lemmata, quæ ſolutioni problematis ut plurimum ſternebant. Neque enim aliud, eorum lemmatum ope, conſequi curabant, quam, ut relationes quantitatum, de quibus in problemate agitur, nitidiores fierent; atque adeo, ut ei ſolvendo aptiores evaderent. Unde peſſime ſe gerunt Analyſtæ Recentiores, qui in reſolutione problematum improbantes lemmatum uſum, ſtatim calculo manum admovent, & in ejus eventum ſe unice committunt. Nec multitudo librorum, quos Veteres de re geometrica ſcripſerunt, argumento eſſe debuit Carteſio, ut inde concluderet, quod vera ratio ſolvendi problemata, iis non conſtiterit.

IV. De tranſitu unius problematis in aliud, & quid exinde accidere poteſt.

659. Etſi certiſſimum ſit, reductione æquationis generalis ſubtrahi radices inutiles, & quæ ad problema minime faciunt; eæ tamen, quæ ſuperſunt in æquatione reducta, tunc tantum ad ſolutionem problematis conferunt omnes, quum æquatio profecta eſt ex ipſo, de quo agitur, problemate. Accidit namque perſæpe, ut loco problematis propoſiti aliud ſubſtituamus, quod cum eo relationem habet. Id vero quum fit, accidere etiam poteſt, ut radices inventæ, ac reductæ æquationis non omnes aptæ ſint ſolvendo problemati principali.

660. Elegans hujus rei exemplum ſuppedi-

tat nobis problema de anguli, aut arcus trisectione: quod tamen, ut ei ostendendæ aptius evadat, juvat, vulgata ratione hoc loco resolvere. Esto itaque circulus ADE, cujus centrum sit punctum F. Et, assumpta in ejus circumferentia portione quavis AD, secanda sit ea in tres partes æquales. Ponatur jam factum, sintque AB, BC, CD partes quæsitæ. Ducantur, tum radii AF, BF, CF, DF; cum chordæ AD, AB, BC, CD. Et, ducta BG, ipsi CF parallela, ponatur AF $= a$, AD $= c$, & AB $= y$.

FIG. 29.

661. Quum ergo, ex constructione, æquiangula sint tria triangula BFA, BHA, GBH; erit, ut AF ad AB, ita AB ad BH, ita BH ad HG. Hinc quatuor rectæ AF, AB, BH, HG continue proportionales erunt: & ea propter erit BH $= y^2 : a$, & HG $= y^3 : a^2$. Quia vero trianguli BFA æqualia sunt latera AF, BF; erunt quoque trianguli BAH æqualia latera AB, AH. Unde, quum eadem ratione ostendantur etiam æqualia latera CD, DK trianguli CDK; erit AD una cum HG æqualis tribus AB, BC, CD simul sumptis, sive etiam triplo unius AB: proindeque erit $c + y^3 : a^2 = 3y$, hoc est $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$.

662. Jam, sicuti hæc æquatio est in propria sua sede, nec ulterius deprimi potest; ita omnes ejus radices sunt reales. Quum enim AD sit recta, in circulo inscripta; ea diametro AL æqualis quidem esse potest, major autem esse non potest. Itaque, omisso casu æqualitatis, velut speciali, AL major est, quam AD, hoc est $2a$ major, quam c; sive etiam a^2 major, quam $c^2 : 4$. Unde, quum fiat quoque a^6 major quam $c^2a^4 : 4$; erit

erit cubus ex triente coefficientis tertii termini, positive sumpti, major quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato: & idcirco in ipsa æquatione omnes radices reales erunt *. *Art. 510.

663. Tres porro reales radices æquationis $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$ habebuntur, si secetur in tres partes æquales, tam arcus DMA, qui est complementum ad circulum ipsius ABD, quam arcus DIL, qui est complementum ad semicirculum ejusdem ABD. Si enim DM, MN, NA sint partes arcus prioris DMA, & DO, OI, IL sint partes arcus alterius DIL; designabit recta AB radicem unam, recta AN radicem alteram, & recta AI radicem tertiam. Quumque ex tribus radicibus æquationis $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$ duæ quidem sint positivæ, & una negativa; erunt rectæ AB, AN radices positivæ, & recta AI radix negativa.

664. Et quidem, rectam AN esse radicem æquationis $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$, perinde ac est recta AB; facili negotio suaderi potest. Nam, quotiescumque trifariam secandus proponitur arcus AD, potest hic esse, tam arcus ABD, quam arcus AND; quum uterque istorum punctis A, & D terminetur. Sed, quod ejusdem æquationis radix est etiam recta AI, quæ nec subtendit trientem arcus ABD, nec trientem arcus AND; id equidem non ita facile concipitur. Nam, quam relationem habeat AI cum problemate de trisectione arcus, sane non apparet.

665. Constabit id autem, si sedulo consideremus, quo pacto suborta sit nobis æquatio, de qua agitur. Nimirum, quum eam obtinuerimus, quærendo valorem chordæ, quæ trientem

dati arcus subtendit; perspicuum est, loco propositi problematis, hoc aliud fuisse solutum, ut inveniatur valor rectæ, quæ ab A ad D ter in circulo successive possit aptari. Unde, quum istud præstari queat per quamlibet rectarum AB, AN, AI; consequens est, ut unaquæque earum rectarum sit valor incognitæ y in comperta æquatione $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$.

666. Esse vero rectam AI radicem negativam æquationis $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$; liquido patebit, si utique ostendi possit, ipsam AI duabus AB, AN simul sumptis æqualem esse. Deest enim in æquatione secundus terminus;
*ar.447. adeoque per ea, quæ supra * notavimus, debet radix negativa adæquare summam ex duabus radicibus positivis. Ostendemus id autem, sub-
FIG. 30. strato hoc lemmate, quod si BCD sit triangulum æquilaterum, in circulo inscriptum, & ex aliquo ejus angulo C ducatur ad latus oppositum BD recta quævis CE, circumferentiæ occurrens in A; duæ AB, AD simul æquales sunt ipsi CA.

667. Neque vero difficile erit, lemma istud ostendere. Quum enim triangula duo CDE, CAD sint æquiangula; erit, ut CD ad DE, ita CA ad AD. Et similiter, quia æquiangula sunt triangula duo CBE, CAB; erit, ut CB, sive CD ad BE, ita CA ad AB. Unde erit quoque, ut CD ad summam ipsarum BE, DE, ita CA ad summam ipsarum AB, AD: proindeque, quemadmodum CD ipsis BE, DE simul sumptis æqualis est; sic & CA ipsas AB, AD simul sumptas adæquabit.

668. Hoc lemmate præmisso, facile modo

erit

erit ostendere, rectam AI ipsis AB, AN simul sumptis æqualem esse; atque adeo eandem AI esse radicem negativam æquationis $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$. Ex constructione enim tres arcus BAN, BDI, IMN inter se sunt æquales. Quare, si puncta tria B, I, N rectis totidem jungantur; triangulum, sub iis comprehensum, æquilaterum erit: & propterea, per lemma jam ostensum, omnino necesse est, ut recta AI ipsis AB, AN simul sumptis sit æqualis. FIG. 25.

669. Cæterum non abs re erit, hic paucis ostendere, qua ratione ex æquatione, mox * inventa, $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$, pro arcus trisectione, eruatur alia illa $x^3 - 3a^2x : 4 - a^2b : 4 = 0$, in quam superius * incidimus. Nimirum, quum ibi b designet sinum complementi arcus dati ABD, & x sinum complementi arcus quæsiti AB; erit, tum $c = \sqrt{(2a^2 - 2ab)}$, cum $y = \sqrt{(2a^2 - 2ax)}$. Unde, positis loco y, & c valoribus istis in æquatione $y^3 - 3a^2y + a^2c = 0$, vertetur ea in hanc aliam $(2a^2 - 2ax)\sqrt{(2a^2 - 2ax)} - 3a^2\sqrt{(2a^2 - 2ax)} + 2a^2\sqrt{(2a^2 - 2ab)} = 0$, sive $a^2\sqrt{(2a^2 - 2ab)} = (a^2 + 2ax)\sqrt{(2a^2 - 2ax)}$. * ar. 661. * ar. 323.

670. Jam, si utraque hujus æquationis pars ad quadratum elevetur, erit $2a^6 - 2a^5b = 2a^6 + 6a^5x - 8a^3x^3$, sive $8a^3x^3 - 6a^5x - 2a^5b = 0$; adeoque divisis omnibus ejus terminis per $8a^3$, habebitur $x^3 - 3a^2x : 4 - a^2b : 4 = 0$, quæ est æquatio invenienda. Atque hujus æquationis tres item sunt radices reales, quarum tamen una tantum apta est solvendo problemati de trisectione arcus ABD: idque, ob eandem rationem: nempe, quia illiusmodi æquatio, non tam ex eo

pro-

problemate profecta est, quam ex alio, quod cum illo relationem habet.

671. Quum enim x designet sinum complementi arcus quæsiti AB; utique, quærendo valorem ipsius x, quæritur valor rectæ, qua definitur positio ejus, quæ ab A ad D ter in circulo successive aptari potest. Unde, quemadmodum hujusmodi rectæ sunt tres, ex quibus una tantum inservit trisectioni arcus ABD; ita, pro tribus earundem rectarum positionibus diversis, triplici valore referta prodibit incognita x: quamquam ex tribus hisce valoribus incognitæ x unus dumtaxat conferat ad solutionem problematis principalis.

V. *Aliæ observationes circa nexum problematum, cum suis æquationibus.*

672. PRæcedenti observationi affinis est hæc alia, quod accidere plerumque potest, ut radices, quas æquatio exhibet possibiles, evadunt impossibiles, ubi ad ipsum problema, unde æquatio orta est, transferuntur. Ad id ostendendum exemplo nobis esse potest sequens problema: dato circulo BDE, & dato extra eum puncto A, ducere secantem
FIG. 31. ABD, ita, ut portiones AB, AD datam ad invicem rationem obtineant.

673. Si enim ratio data ea sit, quam habet a ad b, & ponatur AB $= x$, fiet AD $= bx : a$. Quia vero, ducta ad circulum tangente AE, hæc est datæ longitudinis; ponenda erit AE $= c$: adeoque, quia rectangulum BAD æquale esse debet quadrato ex AE; fiet $bx^2 : a = c^2$, & consequen-

quenter $x^2 = ac^2 : b$. Plane vero radices duæ hujus æquationis sunt semper possibiles, quæcumque sit ratio, quam habet a ad b; quum tamen relate ad problema, de quo agitur, fieri potest, ut valor ipsius x impossibilis evadat.

674. Ducatur namque per centrum circuli C secans AFG. Jamque AF est minima omnium rectarum, quæ ex puncto A cadunt ad convexam circuli circumferentiam; & vicissim AG est maxima omnium rectarum, quæ ex eodem puncto A cadunt ad circumferentiam concavam. Quare ratio, quam habet AF ad AG, minima erit omnium rationum, quæ inter similes rectas reperiuntur: & propterea, si data ratio, quam habet a ad b, minor sit ea, quam habet AF ad AG; plane problema solutu impossibile erit.

675. Radices ergo possibiles æquationis possunt quandoque impossibiles fieri, ubi ad ipsum problema, unde æquatio orta est, transferuntur. Sed ex allato problemate, perspicuum est, id fieri, per ipsius problematis schema, cujus nulla in inventione æquationis habita est ratio. Neque enim æquationem inventam ingreditur magnitudo circuli BDE. Et, sicuti infiniti esse possunt circuli, qui rectam AE velut suam tangentem agnoscunt; ita, quemcumque ex his circulis assumamus, semper quidem in eandem æquationem incidimus.

676. Hinc, in invenienda problematis æquatione, nihil non debet ad calculum poni, quod ad determinationem ipsius problematis pertinet. Et quamquam æquatio haberi queat, omissa aliqua conditione; ubi tamen id accidit, ineunda est potius alia problematis solvendi ratio, ut ea

etiam

etiam conditio æquationem ingrediatur. Quemadmodum in allato problemate, si dabimus operam, ut ipsa circuli magnitudo ad calculum revocetur, prodibit æquatio, quæ ejus naturam adamussim nobis ostendet.

* Art. 573. 677. Nimirum, si iisdem, ut supra * manentibus, demittatur super AD perpendiculum CH, & ponatur CA $= d$, CF, vel CB $= e$, & CH $= y$; fiet AH $= \surd(d^2 - y^2)$, & BH $= \surd(e^2 - y^2)$; atque adeo erit AB $= \surd(d^2 - y^2) - \surd(e^2 - y^2)$, & AD $= \surd(d^2 - y^2) + \surd(e^2 - y^2)$. Unde, quum esse debeat, ut a ad b, ita $\surd(d^2 - y^2) - \surd(e^2 - y^2)$ ad $\surd(d^2 - y^2) + \surd(e^2 - y^2)$; habebitur æquatio $b\surd(d^2 - y^2) - b\surd(e^2 - y^2) = a\surd(d^2 - y^2) + a\surd(e^2 - y^2)$, hoc est $(b - a)\surd(d^2 - y^2) = (b + a)\surd(e^2 - y^2)$, quæ ab assymetris liberata dabit $y^2 = e^2(b + a)^2 : 4ab - d^2(b - a)^2 : 4ab$.

678. Jam in hac æquatione, perspicuum est, impossibilem evadere utrumque valorem incognitæ y, ubi $(b - a)d$ major est, quam $(b + a)e$. Plane vero, si $bd - ad$ major est, quam $be + ae$; erit etiam $bd - be$ major, quam $ad + ae$; atque adeo a ad b minorem habebit rationem, quam $d - e$ ad $d + e$. Est autem AF $= d - e$, & AG $= d + e$. Quare in æquatione $y^2 = e^2(b + a)^2 : 4ab - d^2(b - a)^2 : 4ab$ fiet impossibilis uterque valor incognitæ y, ubi data ratio, quam habet a ad b, minor est ea, quam habet AF ad AG.

679. Sed notandum hoc loco est, quod plerumque videntur ad calculum positæ omnes problematis conditiones, quum tamen longe secus

se

res habeat. Sic in eodem problemate, si iisdem adhuc manentibus ponatur, ut supra *, $AB = x$; ob triangulum obtusangulum ABC, invenietur $BH = (d^2 - e^2 - x^2) : 2x$; atque ideo $AD = (d^2 - e^2) : x$. Unde, quum esse debeat, ut a ad b, ita x ad $(d^2 - e^2) : x$, fiet $x^2 = a(d^2 - e^2) : b$, in qua quidem æquatione videtur ad calculum posita magnitudo circuli BDE; quum tamen, si loco $d^2 - e^2$ substituatur valor ejus c^2, res longe secus appareat. * art. 673.

680. Ne aliquid hic reticeamus, quod ad hanc rem pertinet, notabimus demum, quod fieri quandoque potest, ut æquatio problematis omnes ejus casus minime nobis ostendat. Plane enim, si in recta AB inveniendum sit punctum C, ita, ut partes AC, BC datam obtineant rationem; non unum, sed duo erunt puncta, quæ quæsito satisfacient. Interim, si existente ratione data illa eadem, quam habet a ad b, ponatur $AB = c$, & $AC = x$; æquatio, quæ statim nobis se se offert, erit $x = ac : (a + b)$, quæ, velut primi gradus, unius dumtaxat puncti positionem nobis exhibebit. FIG. 32.

681. Id vero exinde etiam repetendum, quia in inventione æquationis aliquid omissum est, singulis casibus commune. Posito namque quod a major sit, quam b; invenietur punctum C, vel inter A, & B, vel ad partem alteram puncti B. Plane vero, existente $AC = x$, sicuti in primo casu fit $BC = c - x$, ita in secundo casu erit $BC = x - c$. Unde, ut duo isti casus simul comprehendantur, analogiæ termini ad quadratum sunt elevandi. Ita enim erit semper, ut x^2 ad $c^2 - 2cx + x^2$, ita a^2 ad b^2; & conse-

ſequenter æquatio erit $x^2 - 2a^2cx : (a^2 - b^2) + a^2c^2 : (a^2 - b^2) = 0$, quæ duplici ejus radice duos problematis caſus nobis oſtendit.

682. Verum quidem eſt, æquationem iſtam non exiſtere in propria ſua ſede, ſed dividi poſſe in duas alias ſimplices, ex quarum multiplicatione revera componitur. Interim, reductione iſta deprimitur æquatio ad gradum inferiorem, ſed nulla radix inutilis exinde detrahitur. Neque enim problema, de quo agitur, ſolutum eſt in omni extenſione, quam poteſt habere; ſed dumtaxat in ſpecie quadam ſingulari. Unde inventa æquatio eſt etiam ſpecialis, & ſub alia generaliore, in propria ſede exiſtente, continetur.

683. Ut namque problema utrumque caſum comprehendat, quæri debet in recta data AB tale quidem punctum C, ut quadrata duo AC, BC datam obtineant rationem. Plane vero fiet problema generale, ſi data iſta ratio indefinite quoque capiatur, nimirum æqualis ei, quam habet m ad n. Quum autem in hunc modum æquatio problematis fiat $x^2 - 2mcx : (m - n) + mc^2 : (m - n) = 0$, liquet, eam eſſe in propria ſua ſede, nec ad aliam primi gradus deprimi poſſe, niſi, ubi m, & n ſunt numeri quadrati.

CAPUT II.

Reductio æquationum, ubi aliqua componentium eſt ſimplex.

art.636. 684. Vidimus ſuperius, æquationes, non exiſtentes in propria ſua ſede, tri-

tripliciter componi posse. Nam, vel quælibet æquationum componentium est simplex, vel nulla gaudet hac simplicitate, vel denique ex iis aliquæ sunt simplices, aliæ vero non item. Hinc, acturi de reductione æquationum ad propriam sedem, primo casum considerabimus, quum inter æquationes componentes reperitur aliqua simplex; tum alium expendemus, quum hujusmodi simplicitas in nulla æquationum componentium reperitur.

I. *Prior methodus reducendi æquationes, ubi aliqua ex componentibus est simplex.*

685. Quum inter æquationes componentes una, aut plures sunt simplices; æquatio ipsa composita necessario unam, aut plures radices rationales habebit. Unde reducetur talis æquatio ad sedem suam propriam, si, inventis radicibus illis rationalibus, formentur ex iis tot simplices æquationes, quot sunt ipsæ radices. Nam, quum simplices istæ æquationes sint illæ eædem, ex quibus componitur æquatio, de qua agitur; poterit semper per eas æquatio dividi, atque ita ad propriam suam sedem revocari.

686. Jam, ad eruendas radices rationales ex aliqua æquatione, meminisse oportet, ultimum terminum cujuscumque æquationis esse* id, quod ex continua radicum omnium multiplicatione producitur. Hinc enim fit, ut radices rationales dividant exacte, & absque ullo residuo ultimum terminum; adeoque habebuntur radices rationales cujusque propositæ æquationis, si, inven-

* art. 440

ventis divisoribus omnibus; ultimi termini, quæratur, quinam ex iis, substituti in æquatione loco incognitæ, ejus conditiones adimpleant, faciendo, ut æquationis termini omnes contrarietate signorum evanescant.

687. In hoc autem scrutinio peragendo substituendi sunt divisores, loco incognitæ, non modo signo +, verum etiam signo —. Nam fieri potest, ut qui divisor non sit radix positiva alicujus æquationis, idem sit radix negativa. Interim, si termini æquationis habeant alternatim signa +, & —; tunc satis erit, divisores illos substituere signo +, quum omnes radices æquationis sint positivæ: quemadmodum etiam satis erit, illos subrogare signo —, si omnes termini æquationis sint affecti signo +; quum in hoc casu certissimum sit, omnes radices æquationis esse negativas.

688. Esto igitur æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$; & oporteat, radices rationales, si quas habet, invenire. Ultimi termini 6 divisores omnes sunt 1, 2, 3, 6: qui quidem tentandi sunt dumtaxat signo +, quia termini æquationis habent alternatim signa +, & —. Tento itaque 1. Et quia, ope ejus, æquationis termini omnes non evanescunt; tento divisorem alterum 2. Jamque, hujus substitutione, in nihilum abit summa terminorum. Quumque iidem termini evanescant quoque, si loco x ponatur 3; erunt 2, & 3 radices duæ æquationis $x^2 - 5x + 6 = 0$, & consequenter æquationes ejus componentes erunt $x - 2 = 0$, & $x - 3 = 0$.

689. Proponatur adhuc æquatio $x^2 + 3x - 10 = 0$, & inveniendæ sint radices ejus ratio-

tionales, si quas habet. Divisores ultimi termini 10 sunt 1, 2, 5, & 10: qui quidem substituendi sunt, tum signo +, cum signo —; quoniam æquatio unam habet radicem positivam, & aliam negativam. Itaque, quia nec 1, nec — 1 adimplet conditiones incognitæ; tento divisorem alterum 2, qui sane positive sumptus reddit zero æquales terminos omnes æquationis. Quumque hoc idem præstet quoque divisor 5, sumptus negative; erunt 2, & — 5 radices æquationis $x^2 + 3x - 10 = 0$: & propterea ejus componentes erunt $x - 2 = 0$, & $x + 5 = 0$.

690. Proponatur ulterius æquatio $x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$. Sane divisores ultimi termini 8 sunt 1, 2, 4, & 8: qui, sicuti substituendi sunt dumtaxat signo +, quia omnes æquationis radices sunt positivæ; ita ex iis solus divisor 2 adimplet conditiones incognitæ x. Quare in propositæ æquationis compositione una tantum ex componentibus est simplex, nimirum $x - 2 = 0$. Quumque, dividendo $x^3 - 8x^2 + 16x - 8$ per $x - 2$, oriatur $x^2 - 6x + 4$; erit $x^2 - 6x + 4 = 0$ æquatio altera componens.

691. Neque aliter operabitur, si æquatio fuerit litteralis. Proponatur æquatio $x^2 - ax - bx + ab = 0$, cujus ambæ radices sunt positivæ. Jam divisores ultimi termini ab sunt 1, a, b, & ab. Ex his vero divisoribus adimplent conditiones incognitæ x dumtaxat a, & b. Quare erunt a, & b radices duæ æquationis $x^2 - ax - bx + ab = 0$: proindeque componetur eadem per multiplicationem duarum æquationum simplicium $x - a = 0$, & $x - b = 0$.

692. Esto adhuc æquatio litteralis $x^3 -$

$abx - a^2x + a^2b = 0$. Capiantur divisores ultimi termini a^2b; iique erunt 1, a, b, a^2, ab, & a^2b. Ex hisce vero dumtaxat divisor a, positive sumptus, reddit zero æquales æquationis terminos omnes. Quare ad propositæ æquationis compositionem una tantum concurret æquatio simplex $x - a = 0$. Quumque, dividendo $x^3 - abx - a^2x + a^2b$ per $x - a$, oriatur $x^2 + ax - ab$; erit $x^2 + ax - ab = 0$ æquatio altera componens.

693. Hac igitur ratione reducere licebit ad propriam suam sedem æquationes, in quibus aliqua ex componentibus est simplex. Interim, si contingat, ultimum terminum plures divisores habere; tunc hujusmodi methodus, quæ per substitutionem procedit omnium illorum divisorum, nonnihil molestiæ afferet Analystæ. Quare, si fieri potest, præstat, minuere coefficientes terminorum æquationis, ope * ejus transformationis, quæ divisione peragitur; quum sic minuatur etiam numerus divisorum ultimi termini.

* art. 610.

694. Ad minuendum laborem, juvat quoque, invenire limites, intra quos continentur radices, tum positivæ, cum negativæ, ope * earum transformationum, quæ fiunt additione, & subtractione; quum divisores, qui eos limites transgrediuntur, tuto negligi possint. Sed quotiescumque radices æquationis sunt, vel omnes positivæ, vel omnes negativæ; tuto rejici possunt etiam divisores illi, qui coefficientem secundi termini excedunt; quandoquidem in coefficiente isto summa * radicum omnium continetur.

* art. 554. 555.

* art. 440.

695.

695. Speciatim in æquationibus litteralibus, quarum termini omnes sunt homogenei, divisores duarum, aut plurium dimensionum plane rejicere oportet. Nam, sicuti in æquatione simplici incognita est linearis, seu unius dimensionis; ita, ad obtinendam homogeneitatem, etiam ejus incognitæ valor linearis esse debet. Interim, si æquationis litteralis termini omnes non fuerint homogenei; tunc, non modo tentandi sunt divisores unius dimensionis, verum etiam qui ad duas, aut plures dimensiones ascendunt.

696. Quod vero in hac re potissimum curari debet, est, ut tollantur fractiones, quæ forte in æquationum terminis occurrunt. Nam, sicuti, nullis in æquatione fractionibus existentibus, nec item fractio ulla potest esse radix rationalis ipsius; ita vicissim, quum aliqua in æquatione extiterit fractio, fieri poterit, ut etiam fractio aliqua sit radix rationalis talis æquationis. Posse autem ex æquationum terminis semper fractiones auferri; id sane abunde * superius fuit ostensum. *art.609.

II. Altera methodus reducendi æquationes, quarum aliqua ex componentibus est simplex.

697. METhodus, mox * tradita, pro reducendis ad propriam sedem æquationibus, in quibus aliqua ex componentibus est simplex, plerisque in casibus laboriosa nimis deprehenditur: usque adeo, ut labori minuendo nec item indicatæ cautiones sufficere videantur. Quare non abs re fore putamus, pro reductione earundem æquationum, aliam hic me- *art.686.

thodum afferre: quæ, etsi per divisores quoque procedat, non est tamen perinde labori obnoxia, quemadmodum prior.

698. Experiemur autem hanc methodum primo in æquationibus numericis, quæ sane huc redit. In æquatione proposita, loco incognitæ, successive scribatur, primo 0, deinde 1, tum 2, & si placet etiam 3. Postea ex summis, inde ortis, capiantur cujusque divisores. Jamque, non alii divisores prioris summæ radices esse poterunt rationales propositæ æquationis, quam qui inter divisores aliarum summarum reperiunt divisores alios, unitate se invicem excedentes. Quare, pro reductione, eos, & non alios, tentare oportebit.

699. Proponatur æquatio $x^2 - 11x + 30 = 0$. Sane, scribendo 0 loco x, fit summa terminorum 30; fit vero eadem summa successive 20, 12, & 8, si pro x successive etiam scribatur 1, 2, & 3. Jam, sicuti divisores prioris summæ 30 sunt 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; ita erunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 divisores secundæ summæ 20; 1, 2, 3, 4, 6, 12 divisores tertiæ summæ 12; & 1, 2, 3, 6 divisores quartæ summæ 6. Unde eo res redit, ut videamus, quinam ex divisoribus summæ prioris reperiant inter divisores aliarum summarum divisores alios, unitate se invicem excedentes.

700. Et quidem hujusmodi sunt tantum 5, & 6. Nam prior 5 reperit 4 inter divisores secundæ summæ, 3 inter divisores tertiæ, & 2 inter divisores quartæ; qui sane numeri unitate se invicem excedunt. Pariterque alter 6 reperit 5 inter divisores secundæ summæ, 4 inter divi-

sores tertiæ, & 3 inter divisores quartæ: qui etiam numeri unitate se mutuo superant. Quare dumtaxat 5, & 6 tentandi erunt. Quumque propositæ æquationis utraque radix sit positiva; satis erit, eorum utrumque positive scribere loco incognitæ x. Et quia ambo reddunt zero æquales terminos æquationis, fient 5, & 6 propositæ æquationis radices rationales; adeoque ejus componentes erunt $x - 5 = 0$, & $x - 6 = 0$.

701. Proponatur pariter æquatio $x^3 - 8x^2 + 10x + 25 = 0$. In hac, scribendo o pro x, fiet summa terminorum 25; scribendo vero successive 1, 2, & 3, evadit eadem summa, etiam successive, 28, 21, & 10. Jam, sicuti divisores prioris summæ 25 sunt 1, 5, & 25; ita erunt 1, 2, 4, 7, 14, 28 divisores secundæ summæ 28; 1, 3, 7, 21 divisores tertiæ summæ 21; & 1, 2, 5, 10 divisores quartæ summæ 10. Unde, quia ex divisoribus prioris summæ dumtaxat 5 reperit inter divisores aliarum summarum divisores alios, unitate se invicem excedentes: proinde, si quæ sit radix rationalis in æquatione proposita, ea erit, vel 5, vel -5.

702. Esto etiam æquatio $x^3 + 4x^2 - 14x - 12 = 0$. Scribatur loco x successive 0, 1, 2, 3; & summa suorum terminorum prodibit quoque successive -12, -21, -16, 9. Capiantur divisores harum summarum, nulla habita signorum ratione. Et fient 1, 2, 3, 4, 6, 12 divisores summæ prioris; 1, 3, 7, 21 divisores secundæ summæ; 1, 2, 4, 8, 16 divisores tertiæ summæ; & 1, 3, 9 divisores ultimæ summæ. Jam ex divisoribus prioris summæ dumtaxat 6 repe-

rit inter divisores aliarum summarum divisores alios, unitate se invicem superantes. Quare, si quæ sit radix rationalis in proposita æquatione, ea erit, vel 6, vel — 6.

703. Neque vero difficile erit, veritatem hujus methodi ostendere. Jam enim vidimus
* art. 566 supra *, quod, ubi radices alicujus æquatio-
572. nis minuendæ sunt data quantitate, habetur ultimus terminus ejus, in quam æquatio transformatur, scribendo in terminis ipsius æquationis datam illam quantitatem loco incognitæ. Quare, sicuti prior summa est ultimus terminus propositæ æquationis; ita tres aliæ summæ erunt postremi termini æquationum totidem, in quibus radices illius seorsim minutæ sunt numeris 1, 2, 3.

704. Jam, si qui divisor prioris summæ sit radix rationalis æquationis, de qua agitur; idem, minutus seorsim numeris 1, 2, 3, erit pariter radix rationalis trium aliarum æquationum; adeoque exacte, & absque ullo residuo dividet quoque tres alias summas. Unde omnino necesse est, ut ex divisoribus summæ prioris is tantum radix esse possit rationalis propositæ æquationis, qui inter divisores aliarum summarum reperit divisores alios, unitate se invicem excedentes.

705. Sed, cognita methodi ratione, dijudicari modo facile poterit, si divisor ille prioris summæ, qui radix esse potest rationalis propositæ æquationis, sumi debeat positive, an negative, ubi instituendum est rei periculum. Si enim cum aliis divisoribus, quos reperit in aliis summis, constituit progressionem arithmeticam decrescentem, sumendus quidem erit po-

positive; quod si vero cum iis constituit progressionem arithmeticam crescentem, plane negative eum sumere oportebit.

706. Ita in secundo exemplo *, ubi æquatio erat $x^3 - 8x^2 + 10x + 25 = 0$, divisor prioris summæ tentandus prodiit 5. Unde, quia divisores, quos reperit in aliis summis, sunt 4, 3, 2; & cum his constituit progressionem arithmeticam decrescentem: idcirco divisor ille 5 positive tentandus erit. In tertio autem exemplo *, in quo æquatio erat $x^3 + 4x^2 - 14x - 12 = 0$, divisor tentandus prodiit 6. Verum, quia divisores, qui ei in summis aliis correspondent, sunt 7, 8, 9; & cum his progressionem constituit arithmeticam crescentem: proinde divisor ille 6 tentandus erit negative. *art. 701. *art. 702.

707. Cæterum, ad pleniorem hujus methodi intelligentiam, non abs re erit, hic adnotare, quod, non alia de causa præstat, pro x scribere successive, non modo 0, 1, 2, verum etiam 3, nisi, ut contrahatur numerus divisorum, qui radices esse possunt rationales propositæ æquationis. Nam, si tres tantum priores substitutiones adhibeantur, fieri potest, ut plures ex divisoribus prioris summæ reperiant in aliis summis divisores alios, unitatis intervallo progredientes. Quare, ut minuatur eorum multitudo, præstat, quartam quoque substitutionem adhibere. Et ob eandem rationem fieri quandoque potest, ut etiam quinta, sextave substitutio in subsidium sit advocanda.

708. Illud quoque nolim hoc loco reticere, quod ad id opus adhiberi pariter possunt aliquot ex terminis cujuscumque alterius progressionis

arithmeticæ, a zero inchoatæ: adeo nempe, ut licitum erit scribere successive pro x, non modo 0, 1, 2, 3, verum etiam 0, 2, 4, 6, aut 0, 3, 6, 9. Verum, sicuti ex divisoribus prioris summæ ii tantum tentandi sunt in primo casu, qui in aliis summis reperiunt divisores alios, intervallo unitatis progredientes; ita tentare oportebit eos, quibus in aliis summis correspondent divisores alii, progredientes intervallo binarii in secundo casu, & intervallo ternarii in tertio.

709. Hinc, si æquatio fuerit litteralis, obtinebit in ejus reductione eadem methodus, si existente a aliqua ex cognitis talis æquationis, scribantur successive pro x aliquot ex terminis hujus progressionis arithmeticæ 0, $1a$, $2a$, $3a$. Nam rursus, ob eandem rationem, non alii divisores prioris summæ esse poterunt radices rationales ejus, quam qui in aliis summis reperiunt divisores alios, cum quibus intervallo ejusdem quantitatis cognitæ a progrediuntur: in tantum, ut sumi debeant positive, quum progressio arithmetica est decrescens; & negative, quum eadem progressio vicissim est crescens.

III. Tertia methodus reducendi æquationes, ubi aliqua componentium est simplex.

710. TRaditæ sunt adhuc binæ methodi, pro reducendis æquationibus, in quibus aliqua ex componentibus est simplex. Sed, sicuti utraque procedit per divisores ultimi termini; ita evidens est, per secundam priorem contrahi, & determinari divisores illos, qui reducendæ æquatio-

tioni usui nobis esse possunt. Interim, num tales divisores revera sint radices rationales propositæ æquationis, non aliter, quam tentando, dignosci potest. Unde placet, aliam hic methodum afferre, quæ statim in propatulo ponit radices, si quæ sunt, rationales æquationis, de qua agitur.

711. Obtinet autem hæc methodus dumtaxat in æquationibus numericis, in quibus si quæ sint radices rationales, eæ in serie numerorum naturalium, utrinque continuata, debent contineri. Pendet vero ex ea progressionum arithmeticarum proprietate, cujus in primo * libro meminimus: nimirum, quod, si aliquot harum progressionum termini ordine simul multiplicentur, producta exhibebunt progressionem aliam arithmeticam, differentiis suis primis, si illæ fuerint duæ; differentiis secundis, si fuerint tres; differentiis tertiis, si fuerint quatuor; atque ita deinceps.

* *lib.* 1. *art.* 398.

712. Ut enim ex hac proprietate clare liquet, constituere progressionem aliam arithmeticam differentias primas quadratorum, secundas cuborum, tertias quadrato-quadratorum, &c., quæ fiunt ex terminis progressionis alicujus arithmeticæ; ita quoque perspicuum est, quod si in æquatione proposita loco incognitæ substituantur successive aliquot ex numeris naturalibus, a zero se consequentibus, summæ inde prodeuntes, exhibere debeant progressionem arithmeticam; suis differentiis primis, si æquatio fuerit secundi gradus; differentiis secundis, si fuerit tertii; differentiis tertiis, si fuerit quarti; atque ita in infinitum.

713.

713. Hac ratione, si habeatur æquatio secundi gradus $x^2 - 11x + 30 = 0$, substituendo pro x successive 0, 1, 2, 3, prodibunt summæ 30, 20, 12, 6, quarum differentiæ primæ 10, 8, 6 sunt arithmetice proportionales. Atque ita quoque, si habeatur æquatio tertii gradus $x^3 - 18x^2 + 107x - 210 = 0$, substituendo pro x successive 0, 1, 2, 3, 4, orientur summæ -210, -120, -60, -24, -6: quarum, sicuti differentiæ primæ sunt -90, -60, -36, -18; ita differentiæ secundæ -30, -24, -18 progressionem constituunt arithmeticam.

714. Id vero quum ita sit, non alia ratione radices, si quæ sunt, rationales alicujus æquationis poterunt indagari, quam substituendo in ipsa æquatione, loco incognitæ, aliquot ex numeris naturalibus, a zero se consequentibus; & seriem summarum, quæ inde oriuntur, continuando utrinque ea lege, qua summæ illæ progrediuntur. Quum enim, substitutione ejus numeri, qui est radix rationalis æquationis, summa
*art.376. evanescere * debeat; fiet locus huic numero, ubi series illa per zero transibit.

715. Pro continuanda autem serie earum summarum, satis erit, cognitam habere progressionem arithmeticam, quam suis differentiis, sive primis, sive secundis, sive aliis quibusvis constituunt. Ita in æquatione secundi gradus $x^2 -$
*art.713. $11x + 30 = 0$ priores quatuor summæ * sunt 30, 20, 12, 6; & earum differentiæ primæ, progressionem arithmeticam constituentes, sunt 10, 8, 6. Unde, quemadmodum istæ continuantur ex una parte per terminos 4, 2, 0, &c.; ita illæ versus eandem plagam continuabuntur per ter-

mi-

minos 2, 0,0,&c.: proindeque, quia in ſerie poſt priorem ſummam occurrit zero, tum in quinto, cum in ſexto loco; fient 5, & 6 radices rationales ejus æquationis.

716. Similiter in æquatione tertii gradus $x^3 - 18x^2 + 107x - 210 = 0$ priores quinque ſummæ * ſunt − 210, − 120, − 60, − 24, − 6; & iſtarum primæ quidem differentiæ ſunt − 90, − 60, − 36, − 18; ſecundæ vero − 30, − 24, − 18. Quare, ſicuti iſtæ continuantur ex una parte per terminos − 12, − 6, 0, 6, &c.; ita verſus eandem plagam priores quidem differentiæ continuabuntur per terminos − 6, 0, 0, − 6, &c.; ipſæ vero ſummæ per terminos 0, 0, 0, 6, &c.: & propterea, quia in ſerie poſt priorem ſummam occurrit zero in quinto, ſexto, & ſeptimo loco; erunt 5, 6, & 7 radices rationales illius æquationis. * Art. 713.

717. Neceſſe eſt porro, utrinque continuare ſeriem ſummarum, quæ ſubſtitutionibus iis oriuntur, ut haberi poſſint radices rationales, tum poſitivæ, cum negativæ propoſitæ æquationis. Ita, ſi fuerit æquatio $x^2 - 3x - 10 = 0$, ſcribendo pro x ſucceſſive 0, 1, 2, 3, orientur ſummæ − 10, − 12, − 12, − 10, quarum differentiæ primæ erunt 2, 0, − 2. Hæ autem, ſicuti ex uno latere continuantur per terminos − 4, − 6, − 8, &c.; ita ex latere oppoſito progrediuntur per terminos 4, 6, 8, &c. Unde ſeries ſummarum ex utraque parte continuanda erit per terminos − 6,0,8,&c.: proindeque, quum utrinque tranſeat per zero; fient 5, & − 2 radices rationales ejus æquationis.

718. Cæterum, quum pro continuanda ſe-

rie

rie summarum, quæ substitutionibus iis oriuntur, satis sit, cognitam habere progressionem arithmeticam, quam constituunt suis differentiis, sive primis, sive secundis, sive aliis quibusvis; facile erit, definire, quot præcise substitutiones ad hoc opus requirantur. Jam enim progressio arithmetica nota evadit, ubi duo ejus termini, se statim excipientes, innotescunt. Itaque, quia, pro obtinenda progressione arithmetica, pergendum est ad differentias primas in æquationibus secundi gradus, ad. differentias secundas in æquationibus tertii, atque ita deinceps; liquet, tot opus esse substitutionibus, quot designat gradus æquationis, auctus unitate una.

719. Quemadmodum autem æquatio, de qua agitur, tot continet radices rationales, quot vicibus series summarum, quæ iis substitutionibus oriuntur, transire reperitur per zero, ubi utrinque continuatur; ita per contrarium argumento nobis esse debet, eandem æquationem nullam radicem rationalem habere, ubi series illa, utrinque continuata, numquam per zero transit. Interim duo illi termini ejusdem seriei, inter quos zero esse deberet, dabunt nobis limites, quibus una ex radicibus æquationis continetur: adeo, ut, quum radices æquationis sunt irrationales, ope hujus methodi, determinare saltem licebit duos illos numeros naturales, unitate sese excipientes, inter quos cadit unaquæque earum radicum.

720. Denique, cur hæc methodus locum habet dumtaxat in æquationibus numericis, & non item in equationibus litteralibus; haud diffici-

ci-

cile erit intelligere. Nimirum in æquationibus numericis nota eſt nobis progreſſio arithmetica, in qua ſedem ſuam habent radices earundem rationales. Unde, per ſubſtitutionum aliquot terminorum ejus progreſſionis, indagare licebit terminos, qui ſunt radices æquationis. Verum in æquationibus litteralibus, quæ ſit progreſſio arithmetica, in qua locantur radices ipſarum rationales, omnino nos latet; adeoque pro iis æquationibus hujuſmodi methodus minime nobis uſui eſſe poteſt.

721. Quia vero facilius inſtituitur reductio æquationis numericæ, quam æquationis litteralis; nolo hic reticere, quod, ſi aliqua æquatio litteralis non ſit reducibilis, ubi cognitæ ejus numeris quibuſvis exprimuntur, eadem nec item reducibilis erit, ubi in ſua manet generalitate. Unde, ne in reducendis æquationibus litteralibus tempus teratur inutiliter, præſtat, prius inquirere, num æquatio, de qua agitur, in caſu aliquo ſpeciali ſit capax reductionis, nec ne. Nam, ſi contingat, eam, ad ſpeciem aliquam translatam, non poſſe reduci; nec item inſtituenda erit ejus reductio, quum ſub generalibus ſymbolis continetur.

IV. Quomodo inveniendi ſunt omnes alicujus quantitatis diviſores.

722. PErtinet ad hunc locum inventio diviſorum, quorum capax eſt quantitas aliqua. Et quidem, ſi quantitas fuerit numerica, invenientur omnes ejus diviſores in hunc modum. Dividatur ea per minimum ſui di-

divisorem, & quotus adhuc per minimum sui, idque fiat, usque donec quotus oriatur indivisibilis. Sane hac ratione omnes quantitatis divisores primi habebuntur. Unde, si horum divisorum capiantur producta ex singulis binis, ternis, quaternis, &c.; habebuntur hoc pacto omnes divisores compositi.

723. Ita, si numeri 60 divisores omnes desiderentur, dividatur primo ille per 2, ut quotus fiat 30; tum quotus iste 30 dividatur rursus per 2, ut alius oriatur 15; porro 15 dividatur per 3, ut quotiens fiat 5. Et, quia quotiens iste 5 est indivisibilis; erunt divisores primi 1, 2, 2, 3, 5. Unde, qui ex istorum binis componuntur, erunt 4, 6, 10, 15; qui vero ex ternis, erunt 12, 20, 30; quique demum componitur ex omnibus, erit ipse numerus 60.

724. Similiter, si quærantur divisores omnes numeri 100, dividatur primo ille per 2, ut fiat quotiens 50; tum quotiens iste 50 dividatur iterum per 2, ut alius oriatur 25. Et, quia diviso hoc alio 25 per minimum ejus divisorem 5, oritur quotus indivisibilis 5; erunt divisores primi numeri propositi 1, 2, 2, 5, 5. Unde, qui ex istorum binis componuntur, erunt 4, 10, 25; qui vero ex ternis, erunt 20, & 50; ac demum, qui componitur ex omnibus, erit ipse datus numerus 100.

725. Hanc eandem methodum adhibere quoque licebit in quantitatibus litteralibus, quum vel simplices sunt, vel non adeo compositæ. Ita, si quantitatis $21ab^2$ divisores omnes desiderentur, dividatur primo ea per 3, tum quotus $7ab^2$ per 7, deinde quotus ab^2 per a, ac denique

que quotus b^2 per b. Quia ergo ex postrema ista divisione oritur quotus indivisibilis b; erunt quantitatis propositæ divisores primi 1, 3, 7, a, b, b. Quare, qui ex istorum binis componuntur, erunt 21, $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, b^2; qui ex ternis, erunt $21a$, $21b$, $3ab$, $3b^2$, $7ab$, $7b^2$, ab^2; qui ex quaternis, erunt $21ab$, $21b^2$, $3ab^2$, $7ab^2$; ac denique, qui ex omnibus componitur, erit ipsa quantitas proposita $21ab^2$.

726. Eadem ratione, si quærantur divisores omnes quantitatis litteralis $2ab^2 - 6a^2c$; divido primo eam per 2, tum quotum $ab^2 - 3a^2c$ divido per a. Quumque oriatur quotus indivisibilis $b^2 - 3ac$; erunt divisores primi propositæ quantitatis 1, 2, a, $b^2 - 3ac$. Unde, qui ex binis istorum componuntur, erunt $2a$, $2b^2 - 6ac$, $ab^2 - 3a^2c$; qui vero componitur ex omnibus, erit ipsa quantitas $2ab^2 - 6a^2c$. Et ad eundem modum divisores omnes quantitatis $a^2b - abc$ erunt 1, a, b, $a - c$, ab, $a^2 - ac$, $ab - bc$, $a^2b - abc$.

727. Quod si quantitas litteralis sit valde composita: ita, ut, divisa per omnes suos simplices divisores, suspicio sit, eam posse divisorem aliquem compositum habere; tunc disponatur illa secundum dimensiones unius ex litteris ejus, eademque ponatur æqualis zero, seu nihilo, ut fiat æquatio, in qua incognitæ munus subeat littera illa. Et quoniam in fictitia ista æquatione ultimus terminus non est adeo compositus, quemadmodum est summa terminorum totius æquationis; poterunt, per regulam *traditam, divisores ejus omnes inveniri. Unde, si contingat, ut aliquis horum divisorum sit radix ta- *art. 722.

lis

lis æquationis ; jam habebitur divisor compositus propositæ quantitatis.

728. Esto, exempli gratia, $b^2a - da^2 + a^3 - b^2d$ quotus, qui oritur, divisa data quantitate per omnes suos simplices divisores ; & inquirendum sit, num quotus iste admittat divisorem aliquem compositum. Disponatur ea quantitas secundum dimensiones litteræ a, & fiat æquatio $a^3 - da^2 + b^2a - b^2d = 0$. Quia ergo, inventis divisoribus ultimi termini hujus æquationis, fit ejus radix divisor d; erit $a - d$ divisor compositus ejus quotientis. Quumque, facta divisione, oriatur quotus indivisibilis $a^2 + b^2$; hic erit ejusdem quotientis divisor alter compositus. Nec sane, præter hos duos, alius quisquam poterit exhiberi.

729. Similiter, si fuerit $b^2c^2 + a^4 - b^2a^2 - c^2a^2$ quotus, qui superest, dividendo datam quantitatem per omnes suos simplices divisores; dispono partes ejus secundum dimensiones litteræ a, & ex iis constituo æquationem $a^4 - b^2a^2 - c^2a^2 + b^2c^2 = 0$. Tum, quia ex divisoribus ultimi termini fit radix talis æquationis, tam b, quam c : adeo nempe, ut tam positive, quam negative sumpti reddant terminos æquationis nihilo æquales ; concludo, ejus quotientis quatuor esse divisores compositos, scilicet $a - b$, $a + b$, $a - c$, & $a + c$.

730. Verum quidem est, quod in hunc modum dumtaxat reperire licebit divisores compositos, qui sunt unius dimensionis ; quum tamen, ubi quantitas est plurium, quam trium dimensionum, eadem potest etiam admittere divisores compositos plurium item dimensionum. Sed primo

mo, pro reducendis æquationibus, in quibus aliqua ex componentibus est simplex, divisoribus unius tantum dimensionis est opus. Et deinde, methodo non dissimili, possunt item investigari divisores compositi, qui ad plures dimensiones ascendunt.

731 Jam enim, ad inveniendos divisores compositos unius dimensionis, necesse est, disponere partes datæ quantitatis, secundum dimensiones unius ex litteris ejus; & formata ex iis æquatione, inquirere, methodis traditis, num ad fictitiæ hujus æquationis constitutionem concurrant æquationes aliæ simplices. Quare, ad eundem modum, invenientur divisores compositi duarum, aut plurium dimensionum, si ordinata rursus quantitate, secundum dimensiones unius ex litteris, in ea contentis, & instituta æquatione ex partibus ejus, inquiratur, methodis tradendis, num fictitia illa æquatio in duas alias gradus inferioris dividi queat.

732. Cæterum nolo hic reticere, quod ubi, ad inveniendos divisores compositos alicujus quantitatis, fingitur æquatio ex terminis ejus, secundum dimensiones unius ex litteris, in ea contentis; æquatio ista non aliter apta erit inveniendis divisoribus illis, quam ubi maxima ejus litteræ potestas ab omni alia quantitate fuerit vindicata; tum item deleta fractio, quæ exinde in æquatione posset oriri. Ita, si quantitas fuerit $5a^3 - 26ca^2 + 35c^2a - 6c^3$, & instituatur æquatio, secundum dimensiones litteræ a; hæc fiet $a^3 - 26ca^2 : 5 + 7c^2a - 6c^3 : 5 = 0$. Unde, assumpta $b = 5a$, loco ejus adhibenda erit hæc alia $b^3 - 26cb^2 + 175c^2b - 250c^3 = 0$. Nam,

ficuti hujus radices sunt c, $10c$, $15c$; ita fient $c:5$, $2c$, $3c$ radices illius; & consequenter divisores compositi erunt $5a - c$, $a - 2c$, $a - 3c$.

CAPUT III.

Reductio æquationum, in quibus nulla ex componentibus est simplex.

733. TRadita reductione æquationum, in quibus aliqua ex componentibus est simplex; ostendendum est modo, quo pacto ad propriam suam sedem reducantur æquationes illæ, ad quarum constitutionem nulla æquatio simplex concurrit. Etsi enim æquatio tertii gradus sit in sede sua propria, ubi nulla simplex æquatio compositionem ejus ingreditur; non perinde tamen res est de æquationibus altioris gradus. Nam, ut supra * notavimus, componi possunt per multiplicationem aliarum æquationum, quæ, licet simplices non sint, tamen ad gradum pertinent inferiorem.

* art. 631.

I. Ratio reducendi æquationes quarti gradus.

734. UT ergo ab æquationibus quarti gradus ordiamur, perspicuum est, quod, ubi eæ in propria sua sede non existunt, nec tamen ad earum constitutionem ulla concurrit æquatio simplex, non aliter componi queunt, quam per multiplicationem duarum æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus. Sint itaque $x^2 + ax + c = 0$, & $x^2 + bx + d = 0$

$= 0$ duæ istæ æquationes componentes. Jamque, si eæ multiplicentur per se mutuo, prodibit æquatio quarti gradus $x^4 + (a + b) x^3 + (c + d + ab) x^2 + (ad + bc) x + cd = 0$, cujus reductio quæritur.

735. Et quidem in hac æquatione quantitates c, & d, componentes mutua multiplicatione ultimum terminum cd, subductæ ex coefficiente tertii termini $c + d + ab$, relinquunt $+ ab$; atque hujus porro residui quadruplum $4ab$, subductum ex $a^2 + 2ab + b^2$, quadrato coefficientis secundi termini, relinquit $a^2 - 2ab + b^2$, similiter quadratum perfectum. Quare, æquatio quarti gradus divisibilis erit in duas alias secundi gradus, si duo ex divisoribus, exhaurientibus ultimum terminum, subducti ex coefficiente tertii, dent talem quantitatem, ut quadratum coefficientis secundi, quadruplo ejus diminutum, maneat adhuc quadratum.

736. Jam, si hoc contigerit, æquationes componentes determinabuntur in hunc modum. Primo ii divisores, qui illiusmodi effectum producunt, erunt ultimi termini æquationum componentium. Deinde, radice novi illius quadrati, addita, & subtracta ex coefficiente secundi termini, fient semisses summæ, & differentiæ coefficientes ponendi in secundis terminis earundem æquationum. Denique, qui coefficientes ponendi sunt in una æquatione, qui vero in alia; id tentando poterit determinari.

737. Neque vero difficile erit, hujus methodi rationem intelligere. Nam primo, sicuti in æquatione quarti gradus, quæ componitur ex ipsis $x^2 + ax + c = 0$, $x^2 + bx + d$

 $= 0$

$=0$, sunt c, & d divisores, qui eum pariunt affectum; ita eædem quantitates c, & d sunt ultimi termini æquationum componentium. Et secundo, quum in eadem æquatione novum quadratum sit $a^2 - 2ab + b^2$; addendo, & subtrahendo radicem ejus $a - b$ ex coefficiente secundi termini $a + b$, fient a, & b semisses summæ, & differentiæ: quæ sane quantitates sunt coefficientes, existentes in secundis terminis earundem æquationum componentium.

738. Proponatur æquatio $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 22x + 20 = 0$. Sane divisores, exhaurientes ultimum terminum, sunt; vel 1, & 20; vel -1, & -20; vel 2, & 10; vel -2, & -10; vel 4, & 5; vel -4, & -5. Ex his autem, qui pariunt effectum illum, sunt -4, & -5. Nam, subducti ex -3, dant 6; atque hujus quadruplum 24, subductum ex quadrato, quod fit ex 5, dat 1, quod est etiam quadratum perfectum. Unde, quia radix novi hujus quadrati, quæ est similiter 1, addita ad 5 dat 6, & exinde detracta relinquit 4; erunt 3, & 2, semisses summæ, & differentiæ: proindeque æquationes componentes erunt, vel $x^2 + 3x - 4 = 0$, & $x^2 + 2x - 5 = 0$; vel $x^2 + 3x - 5 = 0$, & $x^2 + 2x - 4 = 0$.

739. Hæc eadem regula obtinet etiam, si deest in æquatione aliquis ex terminis intermediis, cujus coefficiens ad calculum poni debet; nimirum, fingendo coefficientem illius termini esse zero, seu nihil. Esto enim æquatio $x^4 - 24x - 32 = 0$, in qua, tum secundus, cum tertius terminus deest. Plane, sicuti ultimus terminus, exhauritur per divisores 8, & -4;

ita,

ita, si divisores isti ex zero subducantur, habebitur -4, cujus quadruplum, subductum item ex zero, dat 16 quadratum perfectum. Capiatur ergo quadrati hujus radix 4, & ejus sub utroque signo semisses erunt 2, & -2. Unde æquationes componentes erunt, vel $x^2 + 2x - 4 = 0$, & $x^2 - 2x + 8 = 0$; vel $x^2 + 2x + 8 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$.

740. Sed notandum hoc loco est, quod, etsi certo concludere liceat, æquationem quarti gradus non esse divisibilem in duas alias secundi gradus, ubi nulli sunt divisores, qui ultimum terminum exhaurientes, effectum illum producunt; non hinc tamen vicissim, concludendum est, eam subinde dividi posse, quum reperiuntur tales divisores. Nam fieri adhuc potest, ut æquatio, de qua agitur, talem compositionem non admittat. Neque id mirum videri debet. Nulla enim habita est ratio coefficientis quarti termini. Et profecto, quum aliquid debet determinari, omnes ejus conditiones ad calculum sunt revocandæ.

741. Num ergo æquatio proposita quarti gradus sit subinde composita, nec ne; constabit nobis, si rei periculum fiat; hoc est, si multiplicentur per se mutuo æquationes, quæ tradita methodo inveniuntur. Interim, si ratio haberi velit coefficientis quarti termini, non modo illud licebit definire, verum etiam hoc amplius poterit determinari, quinam coefficientes ponendi sunt in una æquationum componentium, & qui item in alia: quod, neglecto tali coefficiente, non aliter, quam tentando, potest * indagari. * art. 636.

742. Nimirum in æquatione quarti gradus, quæ componitur ex ipsis $x^2 + ax + c = 0$, & & $x^2 + bx + d = 0$, coefficiens quarti termini est $ad + bc$, hoc est summa productorum, quæ fiunt ex ultimis terminis æquationum componentium in coefficientes secundorum, alternatim acceptos. Itaque, pro adstruenda compositione, necesse est, ut ii divisores sint etiam tales, ut, si unus multiplicetur per semissem prædictæ summæ, & alter per semissem prædictæ differentiæ; summa productorum adæquet coefficientem quarti termini.

*art. 738. 743. Ita in priore exemplo *, ubi æquatio erat $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 22x + 20 = 0$; divisores quidem fuerunt -4, & -5; semisses vero summæ, & differentiæ 3, & 2. Quare, quia, multiplicatis -4 per 3, & -5 per 2, summa productorum fit -22, adeoque æqualis coefficienti quarti termini; revera æquatio illa divisibilis erit in duas alias secundi gradus. Nec aliæ sane erunt ejus æquationes componentes, quam $x^2 + 2x - 4 = 0$, & $x^2 + 3x - 5 = 0$.

*art. 739. 744. Similiter in secundo exemplo *, ubi æquatio erat $x^4 - 24x - 32 = 0$, divisores quidem fuerunt 8, & -4; semisses vero summæ, & differentiæ 2, & -2. Unde, quia, multiplicando 8 per -2, & -4 per 2, oriuntur producta -16, & -8, quorum summa -24 adæquat coefficientem quarti termini; concludendum est, æquationem illam revera divisibilem esse in duas alias secundi gradus; nec alias esse ejus componentes, quam $x^2 + 2x + 8 = 0$, & $x^2 - 2x - 4 = 0$.

745. Cæterum, quia divisores, qui eum pa-

riunt

riunt effectum, debent esse ultimi termini æquationum componentium; perspicuum est, quod si æquatio fuerit litteralis, omnesque ejus termini homogenei, ii tantum divisores effectum illum præstare possunt, qui similiter sunt homogenei, atque adeo duarum dimensionum. Ita, si fuerit æquatio $x^4 - a^2x^2 + 2a^2bx - a^2b^2 = 0$, tametsi plures sint divisores ultimi termini; attamen, qui reductioni æquationis possunt inservire, sunt; vel a^2, & $-b^2$; vel $-a^2$, & b^2; vel ab, & $-ab$.

II. *Reductio æquationum quarti gradus alia methodo instituta.*

746. Regula, mox * tradita, pro reducendis æquationibus quarti gradus, etsi sit valde facilis, ac expedita; attamen ad æquationes altioris gradus nequaquam potest promoveri. Quare, pro reductione earundem æquationum, placet hic aliam methodum proponere, quæ generalis erit, & ad omnes cujuscumque gradus æquationes poterit applicari. Ea autem huc redit, ut assumantur æquationes duæ componentes indeterminate, & quæ ex earum multiplicatione componitur, conferatur cum æquatione proposita. Nam, facta mutua terminorum collatione, habebuntur totidem aliæ æquationes, quarum ope facile erit, æquationes componentes determinate. * *art. 736.*

247. Hanc methodum experiemur primo in ipsis æquationibus quarti gradus. Itaque, si $x^2 + ax + c = 0$, & $x^2 + bx + d = 0$ referant æquationes componentes, multiplicatis iis per se

mutuo, erit $x^4 + (a + b) x^3 + (c + d + ab) x^2 + (ad + bc) x + cd = 0$ æquatio composita. Unde, si æquatio proposita fuerit $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, (quam etiam indeterminatam assumimus, ut possit omnes quarti gradus æquationes nobis exhibere;) collatis terminis unius cum terminis alterius, habebuntur quatuor aliæ æquationes, nempe $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = ad + bc$, & $s = cd$.

748. Quia ergo in prima harum æquationum habetur $p = a + b$; erit, transponendo, $p - a = b$; adeoque, multiplicando per c, erit $pc - ac = bc$: Quare, substituendo in tertia æquatione $r = ad + bc$ loco bc valorem suum $pc - ac$, habebitur $r = ad + pc - ac$; atque adeo, multiplicando rursus per c, erit $rc = acd + pc^2 - ac^2$. Est autem in quarta æquatione $s = cd$, sive etiam $as = acd$. Itaque, substitutione peracta, erit $rc = as + pc^2 - ac^2$: unde infertur $a = (rc - pc^2) : (s - c^2)$.

749. Hinc, cognito valore quantitatis c, cognoscetur etiam valor ipsius a; & consequenter determinabitur prior ex æquationibus componentibus $x^2 + ax + c = 0$: qua utique determinata, altera $x^2 + bx + d = 0$, ope divisionis, poterit definiri. Quantitas autem c, quum dividat exacte ultimum terminum: (est enim $cd = s$;) poterit, tentando, inveniri: nimirum, assumendo pro ea successive divisores omnes ultimi termini sub utroque signo. Interim, si æquatio fuerit litteralis, omnesque ejus termini homogenei; ii tantum divisores tentandi sunt, qui sunt duarum dimensionum.

750. Esto igitur æquatio $x^4 - 7x^3 + 7x^2$
$+ 18x$

$+ 18x + 6 = 0$. Divisores ultimi termini sunt 1, 2, 3, 6. Itaque pro c ponatur -2. Et quia habetur $p = -7$, $q = 7$, $r = 18$, & $s = 6$; erit $a = (rc - pc^2) : (s - c^2) = (-36 + 28) : (6 - 4) = -4$: proindeque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ evadet $x^2 - 4x - 2 = 0$. Dividatur jam æquatio proposita $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$. Et divisio fiet exacte, & absque ullo residuo; orieturque in quotiente hæc altera æquatio $x^2 - 3x - 3 = 0$. Unde, proposita æquatio composita erit, ejusque æquationes componentes erunt $x^2 - 4x - 2 = 0$, & $x^2 - 3x - 3 = 0$.

751. Proponatur similiter æquatio $x^4 - f^2x^2 + 2f^2gx - f^2g^2 = 0$. Et quoniam divisores duarum dimensionum ultimi termini sunt f^2, g^2, fg; pro c ponatur $-fg$. Quumque sit $p = 0$, $q = -f^2$, $r = 2f^2g$, & $s = -f^2g^2$; erit $a = (rc - pc^2) : (s - c^2) = f$; adeoque æquatio $x^2 + ax + c = 0$ evadet $x^2 + fx - fg = 0$. Dividatur ergo æquatio proposita $x^4 - f^2x^2 + 2f^2gx - f^2g^2 = 0$ per $x^2 + fx - fg = 0$. Et, quia divisio fit exacte, oriturque in quotiente hæc alia æquatio $x^2 - fx + fg = 0$; concludendum est, propositam æquationem compositam esse, ejusque æquationes componentes esse $x^2 + fx - fg = 0$, & $x^2 - fx + fg = 0$.

752. Sed proponatur ulterius æquatio $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$. Hæc si reducenda esset methodo, superius * tradita, fient æquationes ejus componentes $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$. Quare, si ejusdem æquationis reductio instituenda esset hac alia methodo, necesse foret pro c ponere 4. Quum * art. 736.

au-

autem ſit $p = -11$, $q = 38$, $r = -44$, & $s = 16$; fiet $a = (rc - pc^2) : (s - c^2) = (-176 + 176) : (16 - 16) = 0 : 0$. Fallit ergo in hoc exemplo methodus; & quæ ſit una ex æquationibus componentibus, ope ejus, erui nequit.

753. Neque verò difficile erit, defectus hujus rationem intelligere. Quum enim æquationes componentes ſint $x^2 - 6x + 4 = 0$, & $x^2 - 5x + 4 = 0$; perſpicuum eſt, eas in ultimo termino eandem quantitatem habere. Itaque, quum pro c aſſumitur 4, æquatio $x^2 + ax + c = 0$ ad utramque æquationum componentium, ut ita dicam, inclinat; adeoque nulla eſt ratio, cur in unam potius, quam in aliam converti debeat. Neceſſe eſt ergo, ut, quum determinatur æquatio illa, in utramque ſimul degeneret: quod utique fieri non poteſt, niſi pro quantitate a duplex valor inveniatur.

754. Fallit itaque methodus in exemplo propoſito; quia, ope ejus, pro a unicus tantum valor reperitur. Sed crediderim, tantum abeſſe, ut methodus nobis deficiat, ut potius rem nobis ſub oculos ponat, & quid latitet in eo exemplo, mire nobis aperiat. Invenitur quippe pro a, beneficio ejus methodi, quotiens, qui oritur dividendo zero per zero, hoc eſt infiniteſimum ultimi generis per aliam ejuſdem generis infiniteſimam. Sed nonne, quum duæ ejuſdem generis infiniteſimæ per ſe mutuo dividuntur, quotiens, inde ortus, eſt * quantitas finita? Adumbrat itaque methodus valorem ipſius a; verum, quia illum exhibet indeterminate, quid aliud exinde arguendum, niſi quod a multiplex eſſe debeat?

* lib. 1. art. 476.

755. Sunt qui credunt, expressionem istam $o:o$ tantundem valere, ac unitatem: ea ducti ratione, quod o dividendus debet esse ad o divisorem, ut est unitas ad quotientem; adeoque, sicuti o divisor adæquat o dividendum, ita quotiens unitati æqualis esse debet. Sed primo, habito o velut infinitesima ultimi generis, clare liquet, non adstrui posse æqualitatem inter singula o. Et deinde, si ita foret, probari posset eodem argumento, unumquemque numerum æqualem esse unitati. Ubi enim multiplicatur 5 per o, producitur o; estque, ut 1 ad 5, ita o multiplicator ad o productum. Unde, si inter duo ista o æqualitas adsit, etiam numerus 5 æqualis fiet unitati.

756. Jam, ut in reducendis æquationibus hujus generis methodus procedat, determinanda est quantitas a, ope alterius c, tali æquatione, ut duplex exinde valor colligi queat: id, quod factu facile erit. Quum enim habeatur $q = c + d + ab$, erit $d = q - c - ab$, & $cd = qc - c^2 - abc$. Sed habetur quoque $cd = s$. Itaque erit $s = qc - c^2 - abc$. Et quoniam æquatio $p = a + b$ dat, transponendo, $p - a = b$, & $pac - a^2c = abc$; erit etiam, substituendo, $s = qc - c^2 - pac + a^2c$: quæ, ordinata juxta dimensiones litteræ a, fiet $a^2 - pa - c + q - s : c = 0$, ubi quantitas a, ob duas dimensiones, duplicem valorem admittit.

757. Videamus itaque modo, num, determinando valorem ipsius a, ope hujus æquationis, methodus procedat in reducenda æquatione, superius * proposita, $x^4 - 11x^3 + 38x^2 - 44x + 16 = 0$. Nimirum, assumendo divisorem

* art. 752.

4 pro

4 pro c, & ſubrogando in ea æquatione loco p, q, & s valores ſuos, mutabitur illa in hanc aliam $a^2 + 11a + 30 = 0$. Plane vero æquationis hujus radices duæ ſunt -5, & -6. Itaque, quum pro c aſſumitur 4, a eſſe poteſt, vel -5, vel -6. Unde inferuntur æquationes duæ componentes $x^2 - 5x + 4 = 0$, & $x^2 - 6x + 4 = 0$.

III. Eadem reducendi methodus ad æquationes altioris gradus extenditur.

758. EXperiamur modo eandem methodum in reductione æquationum altioris gradus. Et quidem, ſi æquatio fuerit quinti gradus, nec ad ejus conſtitutionem ulla concurrat æquatio ſimplex; ea non aliter componi poterit, quam per multiplicationem mutuam duarum æquationum, quarum una ſit ſecundi gradus, altera tertii. Sint ergo $x^2 + ax + c = 0$, & $x^3 + bx^2 + dx + e = 0$ æquationes duæ componentes. Jamque, multiplicatis iis per ſe invicem, fiet $x^5 + (a + b)x^4 + (c + d + ab)x^3 + (e + bc + ad)x^2 + (cd + ae)x + ce = 0$ æquatio compoſita. Unde, ſi æquatio, de qua agitur, ſit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$; collatis terminis unius cum terminis alterius, fiet $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = e + bc + ad$, $s = cd + ae$, & $t = ce$.

759. Et quoniam in prima iſtarum æquationum habetur $p = a + b$; erit, tranſponendo, $p - a = b$; atque adeo, multiplicando per a, erit $pa - a^2 = ab$. Unde, ſi in ſecunda æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor ille, erit $q = c + d + pa - a^2$, hoc eſt $q - c - pa + a^2 = d$, ſive

five etiam $qc - c^2 - pca + ca^2 = cd$. Jam vero quarta æquatio $s = cd + ae$ dat $s - ae = cd$. Quar erit quoque $qc - c^2 - pca + ca^2 = s - ae$; & consequenter $qc^2 - c^3 - pc^2a + c^2a^2 = cs - cae$. Quumque in ultima æquatione habeatur $t = ce$, sive $ta = cae$; erit tandem $qc^2 - c^3 - pc^2a + c^2a^2 = cs - ta$, hoc est $a^2 - pa + ta : c^2 - c + q - s : c = 0$.

760. Hinc, cognito valore quantitatis c, cognoscetur etiam valor ipsius a, atq; adeo determinabitur ęquatio componens secundi gradus $x^2 + ax + c = 0$. Hac autem determinata, definietur altera tertii gradus $x^3 + bx^2 + dx + e = 0$, si utique per eam dividatur æquatio proposita. Sed & quantitas c, quum dividat exacte ultimum terminum t (est enim $ce = t$;) inveniri potest, tentando: nimirum, assumendo pro ea successive divisores omnes ultimi termini: in tantum, ut si æquatio fuerit litteralis, omnesque ejus termini homogenei, ii tantum divisores debeant ad hoc opus adhiberi, qui ad duas dimensiones ascendunt.

761. Nolo autem hoc loco reticere, quod, pro determinando valore quantitatis a, ope alterius c, adhiberi quoque potest hæc alia æquatio $a^2 + c^3a : t - csa : t - pc^3 : t + c^2r : t - c = 0$. Nam, quum habeatur $p = a + b$; erit, rursus transponendo, $p - a = b$, & $pc - ca = bc$. Unde, quum sit etiam $r = e + bc + ad$, sive $r - e - ad = bc$; erit $r - e - ad = pc - ca$, atque adeo $r - e - pc + ca = ad$, sive $cr - ce - pc^2 + c^2a = acd$. Sed habetur quoque $s = ad + ae$, hoc est $s - ae = cd$, sive etiam $as - a^2e = acd$. Itaque erit $cr - ce - pc^2 + c^2a = as - a^2e$; & consequenter $c^2r - c^2e -$

pc^3

$pc^3 + c^3a = acs - a^2ce$. Quumque habeatur pariter $t = ce$; erit tandem $c^2r - ct - pc^3 + c^3a = acs - a^2t$, hoc est $a^2 + c^3a : t - csa : t - pc^3 : t + c^2r : t - c = 0$.

762. Quod, si æquatio fuerit sexti gradus, nec ad ejus constitutionem ulla concurrat æquatio simplex, poterit illa tripliciter componi; vel nempe multiplicatione duarum æquationum, quarum unaquæque sit secundi gradus; vel multiplicatione duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera quarti; vel denique multiplicatione duarum æquationum, quarum quælibet sit tertii gradus. Sed satis erit, duos istos postremos casus expendere. Nam, ubi pro secundo comperta est æquatio quarti gradus, inquirendum deinde erit, num hæc in alias duas secundi gradus rursus dividi possit.

763. Sit ergo æquatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + b = 0$, eaque sit primum composita multiplicatione duarum æquationum, quarum una sit secundi gradus, altera quarti. Referant $x^2 + ax + c = 0$, & $x^4 + bx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ æquationes componentes. Et, multiplicatis istis per se mutuo, producetur æquatio $x^6 + (a + b)x^5 + (c + d + ab)x^4 + (e + bc + ad)x^3 + (f + ae + cd)x^2 + (ce + af)x + cf = 0$ ejusdem formæ cum æquatione proposita. Unde, collatis terminis unius cum terminis alterius, fiet $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = e + bc + ad$, $s = f + ae + cd$, $t = ce + af$, & $b = cf$.

764. Et quoniam in prima harum æquationum habetur $p = a + b$; erit etiam $p - a = b$, & $pa - a^2 = ab$. Unde, quia secunda æquatio dat

dat quoque $q - c - d = ab$; erit $pa - a^2 = q - c - d$, hoc est $a^2 - pa - c + q = d$, & $ca^2 - pca - c^2 + qc = cd$. Jam vero ex quarta æquatione eruitur etiam $s - f - ae = cd$. Quare erit $ca^2 - pca - c^2 + qc = s - f - ae$; & consequenter $c^2a^2 - pc^2a - c^3 + qc^2 = sc - cf - ace$. Hinc, sicuti, substituto loco ace valore ejus $ta - a^2f$, qui infertur ex quinta, habetur $c^2a^2 - pc^2a - c^3 + qc^2 = sc - cf - ta + a^2f$, sive $c^3a^2 - pc^3a - c^4 + qc^3 = sc^2 - c^2f - tca + a^2cf$; ita, si loco cf substituatur valor ejus b, quem ultima præbet, habebitur demum $c^3a^2 - pc^3a - c^4 + qc^3 = sc^2 - cb - tca + ba^2$, sive $a^2 - ba^2 : c^3 - pa + ta : c^3 - c + q - s : c + b : c^2 = 0$, cujus ope, cognito valore ipsius c, facile erit, alterius a valorem invenire; atque adeo determinare æquationem componentem $x^2 + ax + c = 0$.

765. Sed alia etiam æquatio ad hoc opus potest adhiberi. Nam, quum sit $p - a = b$, erit etiam $pc - ca = bc$; adeoque, substituto valore isto in tertia æquatione, fiet $r = e + pc - ca + ad$, & $rc - ce - pc^2 + c^2a = acd$. Quum autem quarta æquatio det etiam $sa - af - a^2e = acd$; erit $rc - ce - pc^2 + c^2a = sa - af - a^2e$, & consequenter $rc^2 - c^2e - pc^3 + c^3a = sca - acf - a^2ce$. Quia vero ex quinta æquatione eruitur $t - af = ce$; substitutione adhuc peracta, erit $rc^2 - tc + acf - pc^3 + c^3a = sca - acf - ta^2 + a^3f$; atque adeo $rc^3 - tc^2 + 2ac^2f - pc^4 + c^4a = sc^2a - tca^2 + a^3cf$. Unde, quum in ultima æquatione habeatur $cf = b$; erit demum $rc^3 - tc^2 + 2bca - pc^4 + c^4a = sc^2a - tca^2 + ba^3$, sive $a^3 - tca^2 : b +$

sc^2a;

$3c^2a:b - c^4a:b - 2ca + pc^4:b + tc^2:b - rc^3:b = 0$: in qua tamen æquatione quantitas a ad tres dimensiones ascendit.

766. Sit secundo æquatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + h = 0$ composita ex multiplicatione mutua duarum æquationum, quarum quælibet sit tertii gradus. Referant $x^3 + ax^2 + cx + f = 0$, & $x^3 + bx^2 + dx + e = 0$ æquationes istas componentes. Jamque, multiplicatis iis per se invicem, orietur æquatio $x^6 + (a + b)x^5 + (c + d + ab)x^4 + (e + f) + ad + bc)x^3 + (ae + bf + cd)x^2 + (df + ce)x + ef = 0$ ejusdem formæ cum æquatione proposita. Quare, collatis terminis unius cum terminis alterius, fiet $p = a + b$, $q = c + d + ab$, $r = e + f + ad + bc$, $s = ae + bf + cd$, $t = df + ce$, & $h = ef$.

767. Quia ergo in prima harum æquationum habetur $p = a + b$, erit $p - a = b$, & $pa - a^2 = ab$. Unde, si in secunda æquatione $q = c + d + ab$ loco ab ponatur valor ille; erit $q = c + d + pa - a^2$, hoc est $a^2 - pa + q - c = d$, sive $fa^2 - paf + qf - cf = df$; atque adeo, per substitutionem, quinta æquatio fiet $t = fa^2 - paf + qf - cf + ce$, sive $tf = f^2a^2 - paf^2 + qf^2 - cf^2 + cef$. Est autem in ultima $h = ef$, sive $ch = cef$. Quare, rursus per substitutionem, erit $tf = f^2a^2 + paf^2 - qf^2 - cf^2 + ch$: unde infertur $c = (f^2a^2 - paf^2 + qf^2 - tf) : (f^2 - h)$: qua mediante æquatione, cognitis valoribus quantitatum a, & f cognoscetur item valor alterius c.

768. Sed, ad determinandam quantitatem c, ope ipsarum a, & e, alia rursus æquatio potest in-

inveniri. Nimirum, quia in tertia æquatione habetur $r = e + f + bc + ad$; erit $rf = ef + f^2 + bcf + adf$. Est autem in ultima $b = ef$. Quare, ponendo in illa b loco ef, erit $rf = b + f^2 + bcf + adf$. Jam vero in secunda æquatione habetur $q = c + d + ab$, hoc est $q - c - ab = d$, sive etiam $aqf - acf - a^2bf = adf$. Itaque, rursus per substitutionem, erit $rf = b + f^2 + bcf + aqf - acf - a^2bf$, in qua si demum loco b ponatur valor ejus $p - a$, qui eruitur ex prima, fiet $rf = b + f^2 + pcf - 2acf + aqf - pa^2f + a^3f$: unde eruitur $c = (a^3f - pa^2f + aqf + b + f^2 - rf) : (2af - pf)$.

769. Jam, quemadmodum habentur duæ simplices æquationes, pro determinanda quantitate c, cognitis valoribus ipsarum a, & f, ita, si inter duos compertos valores ejusdem quantitatis c æqualitas instituatur, habebitur æquatio, pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius f. In hac æquatione quantitas a, quæ velut incognita debet haberi, ad tres dimensiones ascendit. Sed licebit interim, aliam reperire, in qua tamen eadem quantitas a erit quatuor dimensionum. Itaque, assumpto loco f uno ex divisoribus ultimi termini propositæ æquationis, qui debet esse trium dimensionum, si æquatio sit litteralis, & homogenea; primo quidem determinanda est quantitas a, tum deinde quantitas c, per quas determinata jam manet una ex æquationibus componentibus $x^3 + ax^2 + cx + f = 0$.

770. Non dissimiliter determinandæ sunt æquationes componentes, quum æquatio composita plures, quam sex, dimensiones habet; &

omnino superfluum existimamus, diutius in hac re immorari. Tantum hic notabimus, quod, si in æquatione aliqua litterali, scribendo pro litteris cognitis numeros quosvis, talis prodeat æquatio numerica, ut non sit reductionis capax; nec item æquatio ipsa litteralis reduci poterit: cujus rei ratio hæc est, quia litteræ Alphabeti possunt omnes quascumq; quantitates exhibere. Sed non ideo per contrarium putandum est, æquationem litteralem reducibilem esse, quum numerica illa, quæ inde oritur, est capax reductionis; quia fortasse fieri potest, ut æquatio litteralis in ea tantum hypothesi sit reducibilis.

IV. Eadem æquationes reducendi methodus paulo aliter explicata.

771. ÆQuationum, in quibus nulla componentium est simplex, licebit etiam, reductionem instituere, assumendo indeterminate unam tantum ex æquationibus componentibus. Jam enim hæc ex hypothesi dividere debet exacte, & absque ullo residuo æquationem propositam. Itaque, si divisio instituatur; id, quod manebit in dividendo, non amplius divisioni obnoxium, utique zero æquale esse oportebit, Unde, singulis ejus residui terminis zero æquatis, habebuntur totidem æquationes, quarum ope facile erit, æquationem componentem determinare.

772. Proponatur primo æquatio quarti gradus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, sitque ea divisibilis in alias duas, quarum utraque ad secundum gradum ascendat. Referat $x^2 + ax$

$c +$

$+c=0$ unam ex æquationibus componentibus. Jamque, si $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ dividatur per $x^2+ax+c=0$, prodibit in quotiente $x^2+px-ax+q-c-pa+a^2$, & manebit adhuc in dividendo $rx-pcx+2acx-qax+pa^2x-a^3x+s-qc+c^2+pac-ca^2$. Quare, duobus hujus residui terminis zero æquatis, habebuntur duæ istæ æquationes $r-pc+2ac-qa+pa^2-a^3=0$, & $s-qc+c^2+pac-ca^2=0$.

773. Jam, si duæ istæ æquationes ordinentur, secundum dimensiones litteræ a; una fiet $a^3-pa^2+qa-2ca+pc-r=0$, & altera $a^2-pa+q-c-s:c=0$. Quumque posterior, multiplicata per a, & subducta ex priore, det etiam $-ca+sa:c+pc-r=0$, sive $a=(rc-pc^2):(s-c^2)$; jam duæ habebuntur æquationes, pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius c, quarum una erit $a^2-pa+q-c-s:c=0$, & altera $a=(rc-pc^2):(s-c^2)$. Patetque, duas istas æquationes non differre ab iis, quæ superius * sese nobis obtulerunt, ubi utraque æquationum componentium indeterminate fuit assumpta. *art. 748. 756.

774. Proponatur secundo æquatio quinti gradus $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$, sitque ea divisibilis in alias duas, quarum una ad secundum gradum, altera ad tertium ascendat. Referat $x^2+ax+c=0$ æquationem componentem secundi gradus. Jamque, si $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$ dividatur per $x^2+ax+c=0$, prodibit in quotiente $x^3+px^2-ax^2+qx-cx-pax+a^2x+r-pc+2ac-qa+pa^2-a^3$, & relinquetur in dividendo

$sx - rax - qcx + c^2x + 2pacx - 3a^2cx + qa^2x - pa^3x + a^4x + t - cr + pc^2 - 2ac^2 + qac - pa^2c + a^3c$. Quare, æquatis zero duobus terminis hujus residui, orientur duæ istæ æquationes $s - ra - qc + c^2 + 2pac - 3a^2c + qa^2 - pa^3 + a^4 = 0$, & $t - cr + pc^2 - 2ac^2 + qac - pa^2c + a^3c = 0$.

775. Ordinentur jam duæ istæ æquationes, secundum dimensiones litteræ a; & una fiet $a^4 - pa^3 + qa^2 - 3ca^2 + 2pca - ra + c^2 - qc + s = 0$, altera $a^3 - pa^2 + qa - 2ca + pc - r + t:c = 0$. Plane vero, sicuti hæc posterior, multiplicata per a, & subducta ex priore, exhibet $- ca^2 + pca - ta:c + s - qc + c^2 = 0$, hoc est $a^2 - pa + ta:c^2 - s:c + q - c = 0$; ita hæc altera, multiplicata similiter per a, & subtracta ex illarum posteriore, dabit $- ta^2:c^2 - ca + sa:c + pc - r + t:c = 0$, sive $a^2 + c^3a:t - csa:t - pc^3:t + c^2r:t - c = 0$. Unde, pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius c, duæ habebuntur æquationes,
*art. 760. non diversæ ab iis, in quas superius * incidimus,
761. ubi utraque æquationum componentium indeterminate fuit assumpta.

776. Proponatur demum æquatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + b = 0$, sitque ea primum divisibilis in alias duas, quarum una ad secundum gradum, altera ad quartum ascendat. Referat $x^2 + ax + c = 0$ æquationem componentem secundi gradus. Jamque, si illa per istam dividatur, manebit in dividendo $tx - crx + pc^2x - 3ac^2x + 2qacx - 3pa^2cx + 4a^3cx - sax + ra^2x - qa^3x + pa^4x - a^5x + b - sc + qc^2 - c^3 - 2pac^2 + 3a^2c^2 + rac$

$- qa^2c$

$-qa^2c+pa^3c-a^4c$. Unde, æquatis zero duobus terminis hujus residui, & dispositis æquationibus secundum dimensiones litteræ a; fiet, tum $a^5 - pa^4 + qa^3 - 4ca^3 - ra^2 + 3pca^2 + sa - 2qca + 3c^2a - pc^2 + cr - t = 0$, cum $a^4 - pa^3 + qa^2 - 3ca^2 - ra + 2pca + c^2 - qc + s - b:c = 0$.

777. Jam harum æquationum posterior, multiplicata per a, & detracta ex priore, exhibet $-ca^3 + pca^2 - qca + 2c^2a + ba:c - pc^2 + cr - t = 0$, hoc est $a^3 - pa^2 + qa - 2ca - ba:c^2 + pc - r + t:c = 0$; hæc vero, ducta similiter in a, & detracta ex illarum posteriore, dat $-ca^2 + ba^2:c^2 + pca - ta:c + c^2 - qc + s - b:c = 0$, sive $a^2 - ba^2:c^3 - pa + ta:c^2 - c + q - s:c + b:c^2 = 0$; atque ista pariter, multiplicata per a, & subducta ex præcedente præbet $ba^3:c^3 - ta^2:c^2 - ca - 2ba:c^2 + sa:c + pc - r + t:c = 0$, sive $a^3 - tca^2:b - c^4a:b - 2ca + sc^2a:b + pc^4:b - rc^3:b + tc^2:b = 0$. Unde, pro determinanda quantitate a, cognito valore ipsius c, jam habentur illæ eædem binæ æquationes, quæ superius * sese nobis obtulerunt, ubi utraque æquationum componentium indeterminate fuit assumpta.

* art. 764. 765.

778. Quod si vero æquatio sexti gradus $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + b = 0$ sit divisibilis in alias duas, quarum utraque ad tertium gradum ascendat; referat $x^3 + ax^2 + cx + f = 0$ unam ex æquationibus componentibus. Jamque, divisa ea per istam, relinquetur in dividendo $sx^2 - pfx^2 + 2afx^2 - qcx^2 + c^2x^2 + 2pacx^2 - 3a^2cx^2 - rax^2 + qa^2x^2 - pa^3x^2 + a^4x^2 + tx - qfx + 2cfx + pafx - a^2fx - rcx + pc^2x$

$- 2ac^2x + qacx - pa^2cx + a^3cx + b - rf + f^2 + pcf - 2acf + qaf - pa^2f + a^3f$. Unde, zero æquatis tribus terminis hujus residui; orientur tres æquationes, quarum prima erit $s - pf + 2af - qc + c^2 + 2pac - 3a^2c - ra + qa^2 - pa^3 + a^4 = 0$, secunda $t - qf + 2cf + paf - a^2f - rc + pc^2 - 2ac^2 + qac - pa^2c + a^3c = 0$, & tertia $b - rf + f^2 + pcf - 2acf + qaf - pa^2f + a^3f = 0$.

779. Jam ex tribus hisce æquationibus, sicuti ultima dat $b - rf + f^2 + qaf - pa^2f + a^3f = 2acf - pcf$, sive $bc - rcf + cf^2 + qacf - pa^2cf + a^3cf = 2ac^2f - pc^2f$; ita secunda præbet $t - qf + 2cf + paf - a^2f - rc + qac - pa^2c + a^3c = 2ac^2 - pc^2$, sive $tf - qf^2 + 2cf^2 + paf^2 - a^2f^2 - rcf + qacf - pa^2cf + a^3cf = 2ac^2f - pc^2f$. Quare erit $bc - rcf + cf^2 + qacf - pa^2cf + a^3cf = tf - qf^2 + 2cf^2 + paf^2 - a^2f^2 - rcf + qacf - pa^2cf + a^3cf$: quæ, sicuti, deletis terminis, se invicem destruentibus, reducitur ad $bc = tf - qf^2 + cf^2 + paf^2 - a^2f^2$, sive ad $cf^2 - bc = a^2f^2 - paf^2 + qf^2 - tf$; ita, divisa per $f^2 - b$, dabit $c = (a^2f^2 - paf^2 + qf^2 - tf):(f^2 - b)$.

780. Liquet autem, hanc esse primam æquationem, in quam superius * incidimus, pro
*art. 767.
determinanda quantitate c cognitis valoribus ipsarum a, & f. Sed & alteram præbebit nobis æquatio $b - rf + f^2 + pcf - 2acf + qaf - pa^2f + a^3f = 0$. Quum enim sit per transpositionem $2acf - pcf = a^3f - pa^2f + qaf + f^2 - rf + b$, dividendo per $2af - pf$, erit $c = (a^3f - pa^2f + qaf + f^2 - rf + b):(2af - pf)$. Unde hic pariter, si instituatur æqualitas inter duos comper-

per-

pertos valores ejusdem quantitatis *c*; habebitur æquatio, pro determinanda quantitate *a*, cognito valore solius *f*. Quia autem trium illarum æquationum prior* nequaquam ad calculum est posita; liquet, ope ejus, haberi posse, tum æquationem tertiam pro valore ipsius *c*, cum æquationem aliam pro valore ipsius *a*. *art.778.

V. Qua ratione exposita æquationes reducendi methodus contrahi possit.

781. Methodus, hactenus tradita, pro reducendis æquationibus, ubi nulla componentium est simplex, laboriosa nimis deprehenditur, quotiescumque nimia est multitudo divisorum, quorum capax est ultimus terminus propositæ æquationis. Quare, ad minuendum laborem, optandum esset, ut divisores, reducendæ æquationi aptos, cognoscere liceret, eosque adeo secernere ab iis, qui sunt plane ad hoc opus inutiles.

782. Et quidem id non est difficile factu, ubi una ex æquationibus componentibus est secundi gradus. Substituantur enim in æquatione proposita loco incognitæ sex, aut plures ex numeris naturalibus, a zero se consequentibus; & divisores cujusque summæ, positive tantum accepti, addantur, & subtrahantur ex quadrato ejus numeri, per cujus substitutionem orta est summa. Jamque, adscriptis cuique summæ terminis, inde ortis, non alii prioris summæ termini erunt tentandi, quam qui in aliis summis reperiunt terminos alios, cum quibus progressionem arithmeticam constituunt: quos tamen

men sub signis contrariis tentare oportebit; hoc est negative, si fuerint positivi; & vicissim positive, si fuerint negativi.

783. Esto, exempli gratia, æquatio quarti gradus $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$. Sane, scribendo pro x successive 0, 1, 2, 3, 4, 5 oriuntur summæ 6, 25, 30, 15, —2, 21. Addendo autem, & subtrahendo divisores cujusque summæ ex quadrato ejus numeri, per cujus substitutionem summa orta est; fient 1, 2, 3, 6, —1, —2, —3, —6 termini prioris summæ, 2, 6, 26, 0, —4, —24 termini secundæ summæ; 5, 6, 7, 9, 10, 14, 19, 34, 3, 2, 1, —1, —2, —6, —11, —26 termini tertiæ summæ; 10, 12, 14, 24, 8, 6, 4, —6 termini quartæ summæ; 17, 18, 15, 14 termini quintæ summæ; & 26, 28, 32, 46, 24, 22, 18, 4 termini ultimæ summæ.

784. Jam ex terminis prioris summæ dumtaxat 2, 3, —2, —3 reperiunt in aliis summis terminos alios, cum quibus constituunt progressionem arithmeticam. Nam, quantum ad 2, is reperit in secunda 6, in tertia 10, in quarta 14, in quinta 18, & in ultima 22; quantum ad 3, huic occurrit in secunda 6, in tertia 9, in quarta 12, in quinta 15, & in ultima 18; quantum ad —2, ei fit obviam in secunda 2, in tertia 6, in quarta 10, in quinta 14, & in ultima 18; ac demum quantum ad —3, ille offendit in secunda 2, in tertia 7, in quarta 12, in quinta 17, & in ultima 22. Quare ex omnibus terminis prioris summæ dumtaxat illi quatuor tentandi erunt.

785. Neque vero difficile erit, compendii hujus rationem intelligere. Si enim m, & n refe-

fe-

Ferant radices duas æquationis componentis; erit productum ipsarum mn divisor, in reductione adhibendus. Plane vero productum istud manet in summa immutatum, ubi pro incognita ponitur o, fit vero successive $mn - m - n + 1$, $mn - 2m - 2n + 4$, $mn - 3m - 3n + 9$, $mn - 4m - 4n + 16$, $mn - 5m - 5n + 25$, ubi pro eadem incognita successive scribuntur 1, 2, 3, 4, 5. Unde, quia singula ista producta, minuta quadratis numerorum, per quorum substitutionem orta sunt, constituunt progressionem arithmeticam; non aliud quidem efficiendum esset, quam minuere divisores cujusque summæ quadrato ejus numeri, per cujus substitutionem summa illa producitur.

786. Interim, quia divisores cujusque summæ capiendi essent sub utroque signo; liquet, diminutionem illam, in positivis quidem divisoribus habituram fore locum subductionis, in negativis vero gessuram vices additionis. Unde, ut divisores, quorum quæque summa est capax, positive tantum accipi possent; consultius erit, eos addere, & subducere ex quadrato ejus numeri, per cujus subductionem orta est summa. Et quia hac ratione, termini, qui esse debent positivi, fiunt negativi; & vicissim, quos negativos esse oportet, evadunt positivi: hinc est, ut termini, qui reducendæ æquationi reperiuntur idonei, tentandi sint sub signo contrario ei, quo ad summam suam referuntur.

787. Id quum ita sit, liquet, illud, de quo agitur, posse etiam obtineri, si divisores cujusque summæ, sub utroque signo accepti, mi-

minuantur quadrato ejus numeri, per cujus substitutionem summa orta est. Et in hoc casu, sicuti adhuc ii termini prioris summæ æquationi reducendæ sunt apti, qui in aliis summis reperiunt terminos alios, cum quibus progressionem constituunt arithmeticam; ita iidem in reductione, non sub alio, quam sub signo proprio tentandi erunt. Verum præferenda est huic methodus altera; quandoquidem per eam magis contrahitur numerus divisorum, qui ad æquationis reductionem debent adhiberi: ob id ipsum, quod, ope ejus, termini cujusque summæ oriuntur sub signo mutato.

788. Cæterum eadem hac methodo determinare etiam licebit coefficientem secundi termini æquationis componentis. Jam enim pro ultimo termino hujus æquationis poni debet is prioris summæ terminus, sub signo mutato, qui in aliis summis reperit terminos alios, cum quibus constituit progressionem arithmeticam. Quare, si idem ille terminus, qui est prior progressionis, ex secundo subducatur; fiet residuum, adhuc sub signo mutato, coefficiens quæsitus. Sic in allato
*art.783. exemplo * $x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 6 = 0$, si pro ultimo termino æquationis componentis scribatur -2, erit -4 coefficiens secundi ter-
*art.784. mini; quandoquidem pro 2 progressio prodiit * 2, 6, 10, 14, 18, 22. Sed, si ultimus terminus statuatur -3, idem coefficiens fiet -3; nam pro-
*art.784. gressio, orta ex 3, fuit * 3, 6, 9, 12, 15, 18.

789. Hujus rei rationem adjicere, superfluum puto; quum sponte sua sequatur ex ipsa
*art.785. methodi demonstratione, superius * exhibita.
786. Tantum notatu hoc loco dignum existimo, quod

quod, ſicuti hæc methodus procedit, etiam adhibitis aliquot ex terminis cujuſcumque alterius progreſſionis arithmeticæ, a zero inchoatæ; ita, ad determinandum in hoc caſu coefficientem ſecundi termini æquationis componentis, neceſſe eſt, ut ejus, qui tradita * ratione invenitur, ea pars capiatur, quam deſignat ſecundus terminus progreſſionis arithmeticæ, quæ in methodo adhibetur. Nec opus eſt, demonſtrationem hujus rei exhibere; quandoquidem ex iiſdem principiis prono alveo fluit.

* art. 788.

790. Quod ſi nulla ex æquationibus componentibus ſit ſecundi gradus, tunc paulo difficilior erit inquiſitio diviſorum, qui reducendæ æquationi poſſunt inſervire. Nam primo, ſi aliqua adſit tertii gradus, inquirendi ſunt ii in hunc modum. Subſtituantur in æquatione propoſita, loco incognitæ, decem, aut plures ex numeris naturalibus, a zero ſe conſequentibus; & diviſores cujuſque ſummæ, poſitive tantum accepti, addantur, & ſubtrahantur ex cubo ejus numeri, per cujus ſubſtitutionem ſumma orta eſt. Adſcribantur deinde cuique ſummæ termini, inde orti; & non alii prioris ſummæ termini, ſub ſignis propriis, erunt tentandi, quam qui in aliis ſummis reperiunt terminos alios, quorum differentiæ primæ progreſſionem conſtituunt arithmeticam.

791. Secundo, ſi depreſſior æquationum componentium ad quartum gradum aſcendat; tunc diviſores, reducendæ æquationi aptos, diſtinguere licebit hac ratione. Subſtituantur in æquatione propoſita, loco incognitæ, quindecim, aut plures ex numeris naturalibus, a zero

ſe

ſe conſequentibus; & diviſores cujuſque ſummæ, ſumpti dumtaxat poſitive, addantur, & ſubtrahantur ex quadrato-quadrato ejus numeri, per cujus ſubſtitutionem orta eſt ſumma. Adſcribantur poſtea cuique ſummæ termini, inde orti; & non alii prioris ſummæ termini, ſub ſignis mutatis, erunt tentandi, quam qui in aliis ſummis reperiunt terminos alios, quorum differentiæ ſecundæ ſunt arithmetice proportionales.

792. Non diſſimiliter progredi licebit in infinitum; & ex iis, quæ huc uſque ſuper hoc argumento dicta ſunt, haud arduum erit, methodi rationem intelligere. Notandum eſt tamen, poſſe hoc idem pariter obtineri, ſi, factis ſubſtitutionibus, & ſummis comparatis, diviſores cujuſque ſummæ, ſub utroque ſigno ſumpti, vel augeantur, vel minuantur poteſtate non diſſimili ejus numeri, per cujus ſubſtitutionem ſumma orta eſt; hoc eſt augeantur, quum ea poteſtas eſt impar; minuantur, quum viciſſim eſt par. Verum in hoc caſu, terminos prioris ſummæ, quos reducendæ æquationi aptos methodus exhibet, ſemper ſub ſigno proprio tentare oportebit.

CAPUT IV.

Reductio æquationum, quæ radices continent æquales.

793. Æquationes, in quibus duæ, aut plures radices ſunt æquales, in pro-

propria sua sede nequaquam existunt, sed semper ad gradum alterum inferiorem deprimi possunt. Id nullam habet difficultatem, ubi radices æquales sunt commensurabiles, ac rationales. Nam perspicuum est, ad constitutionem ipsarum æquationum tot simplices æquationes concurrere, quotus est numerus radicum æqualium. Quod si vero radices æquales sint incommensurabiles, ac radicales; tunc res fiet manifesta, si ex ipsarum duabus, aut pluribus æquatio constituatur. Nam liquido patebit, æquationem altius assurget, quam cujusque radicis incommensurabilitas patitur.

794. Jam reductio istarum æquationum, in quibus duæ, aut plures radices sunt æquales, iisdem ferme regulis perfici potest, quibus omnium aliarum æquationum reductio instituitur. Sed nihilominus visum est nobis, hujusmodi æquationes speciatim considerare; quia nempe longe facilius alia ratione ad propriam suam sedem deprimi possunt. Dabimus ergo, pro reducendis hujusmodi æquationibus, duplicem methodum, quarum utraque in eo consistit, ut una ex radicibus æqualibus inveniatur. Nam, ea inventa, solius divisionis ope, ad propriam suam sedem æquatio deprimetur.

I. *Prior methodus reducendi æquationes, quæ radices continent æquales.*

795. PRior itaque methodus est illa, quam tradidit Cartesius in sua Geometria, dum tangentes curvarum docuit determinare. Ea autem huc redit. Assumantur in-

indeterminate tot radices æquales, quot æquatio proposita habere supponitur. Tum ex iis constituatur æquatio, quæ pauciores quidem dimensiones, quam proposita, habere potest, plures autem habere non potest. Jam, si æquatio ista non habeat tot dimensiones, quot proposita, multiplicetur per aliam quamvis æquationem, totidem, quot ei desunt, dimensiones habentem. Comparentur porro termini unius æquationis cum terminis alterius. Et ope hujus comparationis unaquæque ex radicibus æqualibus determinabitur.

796. Proponatur, exempli gratia, æquatio duarum dimensionum $x^2 - 6x + 9 = 0$, in qua radices duæ sunt æquales. Designetur unaquæque illarum radicum littera m. Itaque, si fiat $x - m = 0$, & multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$; habebitur æquatio similiter duarum dimensionum $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Comparentur termini istius cum terminis æquationis propositæ; & habebuntur æquationes duæ, una $2m = 6$, altera $m^2 = 9$, ex quarum utraque infertur $m = 3$. Quare æquationes, ex quibus componitur æquatio proposita $x^2 - 6x + 9 = 0$, erunt $x - 3 = 0$, & $x - 3 = 0$.

797. Multiplicetur æquatio $x^2 - 6x + 9 = 0$ per $x + 2 = 0$; & oporteat, æquationis, inde ortæ, $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ radices duas æquales definire. Designetur rursus littera m unaquæque illarum radicum. Itaque, si multiplicetur $x - m = 0$ per $x - m = 0$; habebit æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ duas radices æquales. Multiplicetur ista per æquationem simplicem $x + n = 0$, ut alia oriatur trium dimen-

mensionum $x^3-(2m+n)x^2+(m^2-2mn)x+m^2n = 0$. Conferantur termini istius cum terminis æquationis propositæ; & habebitur $2m-n=4$; $2mn-m^2=3$, & $m^2n=18$. Quia vero prima harum æquationum præbet $n=2m-4$; per substitutionem, secunda quidem fiet $3m^2-8m=3$, sive $m^2-8m:3-1=0$, tertia vero $2m^3-4m^2=18$, sive $m^3-2m^2-9=0$, ex quarum utraque infertur $m=3$.

798. Esto nunc æquatio trium dimensionum $x^3-9x^2+27x-27=0$, in qua omnes radices sunt æquales. Designet quoque littera m unamquamque illarum radicum. Itaque, si multiplicetur $x-m=0$ per $x-m=0$, & quod producitur $x^2-2mx+m^2=0$ multiplicetur rursus per $x-m=0$; orietur æquatio trium dimensionum $x^3-3mx^2+3m^2x-m^3=0$, quæ erit ejusdem formæ cum æquatione proposita; quum similiter omnes habeat radices æquales. Comparentur ergo termini unius cum terminis alterius, & habebitur $3m=9$, $3m^2=27$, & $m^3=27$. Unde, quia ex unaquaque istarum eruitur $m=3$; erit in æquatione proposita numerus 3 valor cujusque radicis.

799. Sed eadem æquatio $x^3-9x^2+27x-27=0$ multiplicetur per $x+2=0$, & oporteat, æquationis, inde ortæ, $x^4-7x^3+9x^2+27x-54=0$ tres radices æquales determinare. Constituatur rursus æquatio indeterminata $x^3-3mx^2+3m^2x-m^3=0$, quæ tres habeat radices æquales. Et quoniam æquatio ista est una dimensione minor proposita, multiplicetur adhuc per æquationem simplicem $x+n=0$, ut alia oriatur quatuor dimensionum

num

num $x^4 - (3m + n) x^3 + (3m^2 - 3mn)x^2 - (m^3 + 3m^2n)x - m^3n = 0$. Conferantur jam termini unius cum terminis alterius; & habebitur $3m - n = 7$, $3m^2 - 3mn = 9$, $3m^2n - m^3 = 27$, & $m^3n = 27$. Sed quoniam ex prima istarum æquationum eruitur $n = 3m - 7$; per substitutionem, secunda fiet $- 6m^2 + 21m = 9$, sive $m^2 - 7m : 2 + 3 : 2 = 0$; tertia $8m^3 - 21m^2 = 27$, sive $m^3 - 21m^2 : 8 - 27 : 8 = 0$; & ultima $3m^4 - 7m^3 = 27$, sive $m^4 - 7m^3 : 3 - 9 = 0$, ex quarum unaquaque eruitur $m = 3$.

800. Jam, quum æquatio tot habet radices æquales, quot sunt dimensiones ejus; æquationes particulares, quarum ope determinanda est quantitas m, sunt semper puræ; adeoque nullo negotio resolvi possunt. Sed, ubi nequaquam continet tot radices æquales; tunc æquationes illæ particulares oriuntur affectæ: proindeque, quæ difficultas vitanda est, pro reducenda æquatione principali, regulis superius traditis; eadem in resolvendis æquationibus illis particularibus occurrit. Interim, si consideremus, quod in omnibus iis æquationibus quantitas a unum, eundemque valorem habere debet; facile apparebit, per mutuam illarum subductionem, qua mediante communis earundem divisor reperitur, valorem ipsius m posse investigari.

801. Ita, ubi æquatio, duas habens radices reales, erat $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$; pro de-
* Art. 797. terminando valore quantitatis m, incidimus * in duas hasce æquationes $m^3 - 2m^2 - 9 = 0$, & $m^2 - 8m : 3 - 1 = 0$. Plane vero, si earum posterior multiplicetur per m, tum ex priore

sub-

subducatur; habebitur $2m^2 : 3 + m - 9 = 0$ sive $m^2 + 3m : 2 - 27 : 2 = 0$. Unde, si rursus hæc ex posteriore illa subtrahatur; orietur $- 25m : 6 + 25 : 2 = 0$: quis, quum reducatur ad $- m : 3 + 1 = 0$, dabit, ut supra *, $m = 3$. *art. 797.

802. Similiter, quando æquatio, tres habens radices reales, erat $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$, pro determinanda quantitate m, sese nobis obtulerunt * tres istæ æquationes $m^4 - 7m^3 : 3 - 9 = 0$, $m^3 - 21m^2 : 8 - 27 : 8 = 0$, & $m^2 - 7m : 2 + 3 : 2 = 0$. Sed, per mutuam subductionem duarum quarumlibet ex eis, valorem ipsius m determinare licebit. Si enim postrema multiplicetur per m, tumque subducatur ex secunda; habebitur $7m^2 : 8 - 3m : 2 - 27 : 8 = 0$, sive $m^2 - 12m : 7 - 27 : 7 = 0$. Quare, si rursus hæc ex postrema subtrahatur, orietur $- 25m : 14 + 75 : 14 = 0$, quæ dabit $m = 3$, prorsus, ut antea *. *art. 778.

*art. 778.

803. Esto nunc æquatio $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$, quæ duas continet radices æquales incommensurabiles. Referat rursus m unamquamque illarum radicum. Et, multiplicando $x - m = 0$ per $x - m = 0$, fiet $x^2 - 2mx + m^2 = 0$. Quia vero æquatio ista est secundi gradus, multiplicetur adhuc per $x^2 + nx + b = 0$; & habebitur æquatio quarti gradus $x^4 - (2m+n)x^3 + (m^2+b - 2mn)x^2) + (m^2n - 2mb)x + m^2b = 0$. Comparentur modo termini istius cum terminis æquationis propositæ; & erit $n - 2m = 0$, $2mn - m^2 - b = 10$, $m^2n - 2mb = 0$, & $m^2b = 25$.

804. Quum ergo sit in prima harum æquationum $n - 2m = 0$, erit $n = 2m$; adeoque, per

per ſubſtitutionem, ſecunda æquatio fiet $3m^2 - b = 10$, quæ dabit $b = 3m^2 - 10$. Hinc, ſubſtitutione ſemper adhibita, tertia quidem æquatio evadet $m^2 - 5 = 0$, & ultima $m^4 - 10m^2 : 3 - 25 : 3 = 0$. Quumque harum prior $m^2 - 5 = 0$, ducta in m^2, & ſubtracta ex poſteriore $m^4 - 10m^2 : 3 - 25 : 3 = 0$, præbeat $5m^2 : 3 - 25 : 3 = 0$, ſive $m^2 - 5 = 0$; liquet, ex æquatione iſta erui debere valorem cujuſque radicum æqualium; proindeque, quum fiat, tum $m = + \sqrt{5}$, cum $m = - \sqrt{5}$; concludendum eſt, unamquamque earum radicum duplicem valorem habere.

805. Id vero mirum videri non debet. Sunt enim in æquatione propoſita $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ duo paria radicum æqualium; ut quæ oritur ex multiplicatione quatuor iſtarum $x - \sqrt{5} = 0$, $x - \sqrt{5} = 0$, $x + \sqrt{5} = 0$, & $x + \sqrt{5} = 0$. Quare, neceſſe eſt, ut radix, repræſentata per m, duplici valore referta oriatur. Unde, obiter notetur hic velim, quod, ubi radices æquales ſunt incommenſurabiles, ſemper cum iis tot vicibus aliæ totidem ſimiliter inter ſe æquales copulari debent, quot gradus incommenſurabilitatis, unitate una minutus, oſtendit: nimirum ſemel, ſi gradus fuerit ſecundus; bis, ſi fuerit tertius; atque ita deinceps.

II. Altera methodus reducendi æquationes, in quibus radices adſunt æquales.

806. Altera methodus, pro reductione æquationum, quæ radices continent æquales, clariſſimo Huddenio ferri debet

bet accepta. Pendet autem ex hoc theoremate, quod, si termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ; altera orietur æquatio, in qua, una dempta, eædem reperientur radices æquales.

807. Hujus etenim theorematis ope, liquet, unamquamque æquationem, quę plures habet radices ęquales, converti posse in aliam, in qua contineatur eædem radices æquales, una dempta; si utique omnes ejus termini multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ. Quare, per diversas hujusmodi multiplicationes, talis semper haberi poterit æquatio, quæ unam tantum contineat radicum æqualium: & propterea, si istius, & æquationis propositæ, per mutuam subductionem, communis divisor capiatur, ille dabit radicem æqualem optatam.

808. Itaque, quum in aliqua æquatione duæ extiterint radices æquales; ad inveniendam æquationem alteram, quæ unicam tantum contineat illarum radicum, necesse est, terminos illius semel multiplicare per terminos alicujus progressionis arithmeticæ. Sed, si in æquatione proposita tres fuerint radices æquales; tunc multiplicatio bis quidem fieri debet: quemadmodum ter, si radices æquales fuerint quatuor; quater, si fuerint quinque; atque ita deinceps. Nam, ut jam dictum est *, per singulas hujusmodi multiplicationes, una tantum radicum æqualium tollitur. *Art. 807.

809. In multiplicatione autem peragenda, habenda est ratio etiam terminorum, qui forte desunt in æquatione; in tantum, ut ii quo-

que habeant suos progressionis terminos correspondentes . Quia vero progressio sumi potest ad libitum ; usurpari poterit illa ipsa , quam in terminis æquationis constituunt potestates incognitæ exponentibus suis . Qua ratione tolletur ex æquatione una ex radicibus æqualibus, multiplicando quemque terminum ejus per numerum dimensionum, quas in eo habet incognita.

810. Plane vero in hunc modum nova æquatio fiet semper uno gradu depressior præcedente . Nam , quum in ultimo termino nullas incognita habeat dimensiones , ille per zero erit multiplicandus: proindeque idem abibit in nihilum , efficietque , ut alterius æquationis termini omnes per ipsam incognitam dividi queant. Evenit itaque id , quia progressio arithmetica , quæ adhibetur , desinit in zero. Sed liquet, idem haberi posse pariter , si eligatur progressio arithmetica , quæ a zero incipiat . Nam hac ratione prior æquationis terminus in nihilum abibit.

811. Habeat itaque primum æquatio duas tantum radices æquales , sitque ea $x^2 - 6x + 9 = 0$. Sane, multiplicatis terminis ejus per 2, 1, 0, fiet $2x^2 - 6x = 0$, sive $x - 3 = 0$. Quare erit 3 unaquæque radicum æqualium . Sed, si æquatio , duas habens radices æquales , sit $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$; tunc , multiplicando ejus terminos per 3, 2, 1 , 0, orietur $3x^3 - 8x^2 - 3x = 0$, sive $x^2 - 8x : 3 - 1 = 0$. Plane vero , sicuti ista ducta in x , & subtracta ex proposita , dat $- 4x^2 : 3 - 2x + 18 = 0$, sive $x^2 + 3x : 2 - 27 : 2 = 0$; ita , si hæc ex illa subducatur , habebitur $- 25x : 6 + 25 : 2 = 0$; quæ quum præbeat $x = 3$, fiet rursus 3 una-

quæ-

quæque radicum æqualium.

812. Habeat secundo æquatio tres radices æquales, sitque illa $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$. Multiplicentur termini ejus per 3, 2, 1, 0; jamque fiet $3x^3 - 18x^2 + 27x = 0$, sive $x^2 - 6x + 9 = 0$ æquatio nova. Multiplicentur rursus termini alterius hujus æquationis per 2, 1, 0; & habebitur $2x^2 - 6x = 0$, sive $x - 3 = 0$: proindeque erit 3 quælibet radicum. Sed, si æquatio, tres habens radices æquales, sit $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$; tunc, peracta multiplicatione, ex ista quidem eruitur $4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 27x = 0$, sive $x^3 - 21x^2 : 4 + 9x : 2 + 27 : 4 = 0$; ex hac vero infertur $3x^3 - 21x^2 : 2 + 9x : 2 = 0$, sive $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$.

813. Hinc, ut nota evadat unaquæque radicum æqualium, inveniendus est communis divisor postremæ hujus æquationis $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$, & æquationis propositæ $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$. Invenietur is autem in hunc modum. Primo æquatio $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$, ducta in x^2, subtrahatur ex $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 27x - 54 = 0$; & habebitur $- 7x^3 : 2 + 15x^2 : 2 + 27x - 54 = 0$, sive $x^3 - 15x^2 : 7 - 54x : 7 + 108 : 7 = 0$. Deinde eadem æquatio $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$, multiplicata per x, subducatur ex hac alia; & fiet $19x^2 : 14 - 129x : 14 + 108 : 7 = 0$, sive $x^2 - 129x : 19 + 216 : 19 = 0$. Denique æquatio ista subducatur ex $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$; & orietur $125x : 38 - 375 : 38 = 0$, sive $x - 3 = 0$. Quare erit 3 unaquæque radicum æqualium.

814. Sed notetur hoc loco velim, unamquam-

quamque radicum æqualium posse etiam determinari, inveniendo communem divisorem duarum æquationum, quæ, ope multiplicationis, ex æquatione proposita sunt deductæ. Jam enim æquationes istæ sunt $x^3 - 21x^2 : 4 + 9x : 2 + 27 : 4 = 0$, & $x^2 - 7x : 2 + 3 : 2 = 0$. Plane vero, si harum posterior, ducta in x, subducatur ex priore; habebitur $-7x^2 : 4 + 3x + 27 : 4 = 0$, sive $x^2 - 12x : 7 - 27 : 7 = 0$. Ista autem, subtracta ex posteriore, dabit $-25x : 14 + 75 : 14 = 0$: ex qua quum rursus eruatur $x - 3 = 0$, fiet adhuc 3 quælibet radicum æqualium.

815. Sed proponatur ulterius æquatio $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$, quæ duas continet radices æquales incommensurabiles. Sane, multiplicatis terminis ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, orietur $4x^4 - 20x^2 = 0$, sive $x^2 - 5 = 0$. Et, quoniam hæc, ducta in x^2, & subtracta ex æquatione proposita, præbet $-5x^2 + 25 = 0$, sive $x^2 - 5 = 0$; ex ista erui debet valor cujusque radicum æqualium. Unde, quum fiat, tum $x = +\sqrt{5}$, cum $x = -\sqrt{5}$; liquet, unamquamque earum radicum duplicem valorem habere: quod unde fiat, jam superius * innuimus.

* art. 805.

816. Proponatur similiter æquatio $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x + 16 = 0$, quæ pariter duas continet radices æquales incommensurabiles. Plane, multiplicando terminos ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, orietur $4x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 16x = 0$, sive $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$. Et quoniam hæc, multiplicata per x, & subducta ex æquatione

pro-

proposita, dat $-x^3 - 2x^2 + 12x + 16 = 0$, sive $x^3 + 2x^2 - 12x - 16 = 0$; subducatur rursus ista ex præcedente, & fiet $-5x^2 + 10x + 20 = 0$, sive $x^2 - 2x - 4 = 0$. Quumque hæc alia, ducta in x, & detracta ex earum alterutra, præbet rursus $x^2 - 2x - 4 = 0$; ex ista erui debet valor cujusque radicum æqualium: proindeque, quum resolutione hujus æquationis habeatur, tam $x = 1 + \surd 5$, quam $x = 1 - \surd 5$; fient duo valores cujusque earum radicum.

III. *Demonstratio theorematis, cui præcedens methodus innititur.*

817. PRæcedens methodus reducendi æquationes, quæ radices continent æquales, ut jam innuimus *, huic innititur theorematì, quod, si termini alicujus æquationis, duas, aut plures radices æquales habentis, multiplicentur ordine per terminos alicujus progressionis arithmeticæ; orietur æquatio altera, in qua, una dempta, eædem erunt radices æquales. Unde, ne ullum in ea methodo dubium maneat, non abs re erit, demonstrationem talis theorematis hoc loco subnectere.

* art. 806.

818. Et quidem, quum omnes æquationis radices sunt æquales, & progressio arithmetica incipit a zero; facile erit, veritatem theorematis ostendere. Si enim x sit incognita, & a referat unamquamque earum radicum; termini æquationis exhibebunt in hoc casu potestatem aliquam binomii $x - a$; hoc est quadratum, si radices æquales sint duæ; cubum, si tres; qua-

drato-quadratum, si quatuor; atque ita deinceps. Unde eo res redit, ut ostendamus, multiplicatione illa, oriri æquationem aliam, quæ terminis suis exhibeat potestatem ejusdem binomii $x - a$, uno gradu minorem.

819. Id vero generaliter ostendemus in hunc modum. Sit m exponens potestatis binomii $x - a$, quam terminis suis exhibet æquatio proposita. Jamque per ea, quæ alibi * ostensa sunt, æquatio erit $x^m - max^{m-1} + (m.m-1).a^2x^{m-2}:2 - (m.m-1.m-2)a^3x^{m-3}:(2.3) + (m.m-1.m-2.m-3)a^4x^{m-4}:(2.3.4) - \&c = 0$. Plane vero, si progressio arithmetica incipiat a zero, repræsentari ea poterit indefinite per $0, b, 2b, 3b, 4b$, &c. Quare, facta multiplicatione, æquatio evadet $-mbax^{m-1} + (m.m-1)ba^2x^{m-2} - (m.m-1.m-2)ba^3x^{m-3}:2 + (m.m-1.m-2.m-3)ba^4x^{m-4}:(2.3) - \&c. = 0$: quæ, divisa per $-mba$, fiet $x^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-1.m-2)a^2x^{m-3}:2 - (m-1.m-2.m-3)a^3x^{m-4}:(2.3) + \&c. = 0$.

*lib. 1. art. 831.

820. Ponatur jam $m - 1 = n$; & eadem æquatio reducetur ad hanc aliam $x^n - nax^{n-1} + (n.n-1)a^2x^{n-2}:2 - (n.n-1.n-2).a^3x^{n-3}:(2.3) + = 0$: proindeque exhibebit * terminis suis eam potestatem ejusdem binomii $x - a$, quæ habet n pro suo exponente. Est autem n numerus unitate una minor, quam m. Itaque potestas binomii $x - a$, exhibita per terminos hujus æquationis, erit etiam uno gradu minor ea, quæ per terminos æquationis propositæ exhibetur: & propterea, quum omnes æqua-

*lib. 1. art. 831.

quationis radices sunt æquales, & progressio arithmetica incipit a zero; jam veritas theorematis, de quo agitur, demonstrata manet.

821. Quod si vero æquales sint omnes æquationis radices, sed progressio arithmetica non incipiat a zero; tunc idem theorema ostendetur in hunc modum. Progressio arithmetica, quæ suum initium a zero non trahit, exhiberi potest generaliter per c, $c+b$, $c+2b$, $c+3b$, $c+4b$, $c+5b$, &c. Quare, quum ista progressio oriatur addendo ad c terminos hujus o, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c.; liquet, multiplicatione peracta, novam æquationem continere terminos propositæ, semel quidem multiplicatos omnes per c; alia vero vice ductos seorsim in terminos progressionis arithmeticæ, a zero inchoatæ, o, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c.

822. Jam, etsi, quum termini æquationis propositæ multiplicantur omnes per c, maneat in ea ille idem numerus radicum æqualium, qui aderat prius; attamen, quum iidem termini multiplicantur seorsim per terminos progressionis arithmeticæ o, b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c., aufertur * ex ipsa una ex radicibus æquali- * *Art.* 818.
bus. Quare, quum æquatio nova utriusque multiplicationis subortos terminos contineat; omnino necesse est, ut in nova æquatione numerus radicum æqualium unitate una minutus reperiatur.

823. Denique, quum non omnes æquationis radices sunt equales, constabit veritas theorematis, si sedulo consideretur, quantitatem, quæ dividi potest, per alteram datam quantitatem, posse adhuc per eandem dividi, tametsi per tertiam

aliam

aliam quantitatem multiplicetur. Ita quantitas $ac + bc$ dividi potest per $a + b$. Plane vero, si ea multiplicetur per $d + e$; productum $acd + bcd + ace + bce$ adhuc dividi poterit per $a + b$ Nam, sicuti ex priore divisione quotiens oritur c; ita ex hac alia habebitur in quotiente $cd + ce$.

824. Id quum ita sit, liquet, quod si termini alicujus æquationis, cujus omnes radices sunt æquales, multiplicentur, non modo singuli per singulos terminos alicujus progressionis arithmeticæ, verum etiam omnes per aliam quamvis quantitatem; æquatio, quæ producitur, habere debet easdem radices æquales, una dempta. Unde modo facile erit, veritatem theorematis extendere, etiam ad eas æquationes, in quibus non omnes radices sunt æquales.

825. Plane enim æquatio, cujus non omnes radices sunt æquales, considerari potest, velut orta, multiplicando æquationem, omnes radices æquales habentem, per aliam, cujus radices ab iis sunt diversæ. Ut, si æquatio fuerit tertii gradus, & in ea duæ tantum radices sint æquales; considerari ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, duas radices æquales habentis, per æquationem simplicem $x + n = 0$, cujus radix differt ab iis.

826. Jam, sicuti, multiplicando $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ per $x + n = 0$, oriuntur duo producta partialia, quorum unum est $x^3 - 2mx^2 + m^2x = 0$, & alterum $nx^2 - 2mnx + m^2n = 0$; ita unumquodque horum productorum non aliud erit, quam ipsa æquatio $x^2 - 2mx + m^2 = 0$, omnes habens radices æquales, multiplicata per aliam quantitatem. Unde, de veritate theo-

theorematis nullus foret dubitandi locus, si cum singulis hisce productis nobis solummodo res esset.

827. Et quidem, tametsi duo illa producta in æquatione proposita tertii gradus inter se conjuncta reperiantur; perinde tamen res est, ac si cum iis seorsim ageretur. Quum enim termini, in quibus incognita eundem dimensionum numerum habet, debeant * unus infra alium poni; utique duo illa producta, in constituenda æquatione tertii gradus, non aliter scribenda erunt, quam sicuti factum hic vides. * art. 330.

$$\begin{array}{l} x^3 - 2mx^2 + m^2x \\ \quad + nx^2 - 2mnx + m^2n \end{array} = 0$$

828. Hinc, multiplicando terminos istius æquationis ordine per terminos progressionis arithmeticæ $c, c+b, c+2b, c+3b$; jam termini prioris producti $x^3 - 2mx^2 + m^2x$ multiplicantur per terminos progressionis $c, c+b, c+2b$; & termini alterius producti $nx^2 - 2mnx + m^2n$ multiplicantur per terminos $c+b, c+2b, c+3b$, qui similiter progressionem arithmeticam constituunt. Perinde itaque res est, ac si cum productis illis seorsim ageretur. Unde, quia, multiplicatione peracta, unumquodque illorum productorum debet unam tantum continere radicem æqualem; etiam æquatio, quæ ex iisdem productis constituitur, unicam dumtaxat radicem æqualem continebit.

829. Eadem autem est demonstratio, quum æquatio est plurium, quam trium dimensionum, & plures item, quam duas, continet radices æquales. Nam, si æquatio fuerit quinti gradus, & contineat tres radices æquales; considerari

ea

ea poterit, veluti orta ex multiplicatione æquationis $x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3 = 0$, tres radices æquales habentis, per aliam quamvis secundi gradus $x^2 + nx + b = 0$: proindeque eadem constabit ex tribus productis, quorum unum erit $x^5 - 3mx^4 + 3m^2x^3 - m^3x^2$, alterum $+ nx^4 - 3mnx^3 + 3m^2nx^2 - m^3nx$, & tertium $bx^3 - 3bmx^2 + 3bm^2x - bm^3$. Et liquido patet, perinde esse, ac si cum singulis hisce productis seorsim ageretur.

IV. Alia ejusdem theorematis demonstratio pro uno casu speciali.

830. ETsi, ad tollendam ex æquatione proposita unam ex radicibus æqualibus, in ea contentis, multiplicari possint termini ejus per correspondentes terminos cujuscumque progressionis arithmeticæ; ut plurimum tamen Algebristæ eam ad hoc opus solent progressionem arithmeticam adhibere, quam constituunt numeri dimensionum, quas in iisdem terminis habet incognita: quia nempe in hunc modum ultimus terminus evanescit; adeoque nova æquatio, in qua, una dempta, eædem continentur radices æquales, uno gradu depressior oritur. Unde non abs re erit, pro casu isto speciali, veritatem theorematis paulo aliter ostensam exhibere.

831. Assumatur ergo, si placet, æquatio quarti gradus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, & habeat ea primum duas radices æquales. Multiplicentur termini ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita. Dico, æquatio-

tionem, inde ortam, $4x^3+3px^2+2qx+r=0$ revera subsistere; eandemque unam tantum ex iis radicibus æqualibus continere. Ut id ostendamus, minuantur radices propositæ æquationis quantitate aliqua a. Jamque in nova æquatione, quæ transformatione ista orietur, sicuti ultimus terminus erit * $a^4+pa^3+qa^2+ra+s$, ita coefficiens quarti, seu penultimi termini fiet * $4a^3+3pa^2+2qa+r$. *art.566. *art.567.

832. Supponamus modo, quantitatem a exhibere nobis unamquamque radicum æqualium. Itaque in nova æquatione utraque earum radicum evanescet. Quare evanescet quoque, tum ultimus terminus, in quo productum ex radicibus omnibus continetur *, cum coefficiens quarti termini, qui continet summam productorum ex singulis ternis earundem radicum: & propterea erit, tam $a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0$, quam $4a^3+3pa^2+2qa+r=0$. Unde, scribendo rursus x loco a, habebitur, non modo $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, verum etiam $4x^3+3px^2+2qx+r=0$. *art.440.

833. In hypothesi ergo, quod æquationis $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ radices duæ sunt æquales, subsistere etiam debet æquatio ista $4x^3+3px^2+2qx+r=0$. Quod autem in hac æquatione, nonnisi una earum radicum æqualium, reperiatur; id ex eodem fonte prono alveo fluit. Si enim duæ aliæ radices propositæ æquationis sint b, & c; erit * $4a^3+3pa^2$ *art.440.
$+2qa+r=(a-a)^2.(b-a)+(a-a)^2.(c-a)+2(a-a).(b-a).(c-a)$.
Quare, scribendo rursus x pro quantitate a, qua æquatio transformatur; fiet etiam $4x^3+3px^2$
$+2qx$

$+ 2qx + r = (a - x)^2 . (b - x) + (a - x)^2 . (c - x) + 2 (a - x) . (b - x) . (c - x)$: & propterea, ficuti hæc fumma pofterior femel tantum dividi poteft per binomium $x - a$; ita quoque prior fumma per idem binomium femel dumtaxat dividi poterit.

834. Habeat fecundo eadem æquatio quarti gradus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ tres radices æquales. Multiplicentur termini ejus per numeros dimenfionum, quas in iis habet incognita; & dico, æquationem, inde ortam, $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$ revera fubfiftere, eandemque duas ex iis radicibus æqualibus continere. Multiplicentur pariter termini alterius hujus æquationis per indices poteftatum, ad quas in iis afcendit incognita; & dico, fubfiftere etiam æquationem, quæ inde oritur, $6x^2 + 3px + q = 0$, fed eam unam tantum ex iifdem radicibus æqualibus comprehendere.

835. Ut hæc oftendamus, minuantur quoque radices propofitæ æquationis quantitate aliqua a. Et in nova æquatione, quæ prodibit
*art. 566. transformatione ifta, ficuti ultimus terminus *
*art. 567. erit $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s$; ita fiet * $4a^3 +$
*art. 568. $3pa^2 + 2qa + r$ coefficiens quarti termini, & * $6a^2 + 3pa + q$ coefficiens termini tertii. Finge jam, quantitatem a exhibere unumquamque radicum æqualium. Et, ficuti in nova æquatione eæ evanefcunt, ita evanefcet pariter
*art. 440. & ultimus terminus, qui continet * productum ex radicibus omnibus; & coefficiens quarti termini, qui continet fummam productorum ex fingulis ternis; & coefficiens termini tertii, qui continet fummam productorum ex fingulis binis.

836.

836. Hæc vero quum ita sint; erit, & $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$, & $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r = 0$, & $6a^2 + 3pa + q = 0$. Unde, scribendo rursus x loco a; habebitur, non modo $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, verum etiam, & $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$, & $6x^2 + 3px + q = 0$: proindeque jam liquido patet, quod, ubi æquationis hujus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ tres radices sunt æquales, subsistere debent quoque aliæ duæ istæ æquationes $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$, & $6x^2 + 3px + q = 0$. Quod autem in harum æquationum priore existunt duæ ex iis radicibus æqualibus, & una dumtaxat in secunda; id ex iisdem principiis sic quidem eruitur.

837. Esto b radix quarta propositæ æquationis. Fiet itaque * primo $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r = (a - a)^3 + 3(a - a)^2 . (b - a)$. Et, scribendo rursus x pro quantitate a, quæ in transformatione adhibetur; erit etiam $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = (a - x)^3 + 3(a - x)^2 . (b - x)$. Quare, sicuti hæc posterior summa, divisa semel per binomium $x - a$, rursus per idem binomium dividi potest; ita quoque summa prior per binomium $x - a$ bis quidem dividi poterit: quod argumento nobis esse debet, in æquatione $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$ duas dari radices, æquales ipsi a. *art. 440.

838. Sed, exhibente adhuc b radicem quartam propositæ æquationis, fiet * secundo $6a^2 + 3pa + q = 3(a - a)^2 + 3(a - a).(b - a)$. Unde, scribendo semper x pro quantitate a, per quam æquatio transformatur, erit quoque $6x^2 + 3px + q = 3(a - x)^2 + 3(a - x).(b - x)$. *art. 440.

Jam

Jam vero posterior hæc summa semel tantum dividi potest per binomium $x - a$. Quare etiam summa prior semel tantum per idem binomium divisibilis erit: & ea propter in æquatione $6x^2 + 3px + q = 0$ una dumtaxat dabitur radix, æqualis ipsi a.

839. Eadem methodo demonstrare licebit veritatem theorematis, de quo agitur, pro casu isto speciali, quum æquatio plures habet radices æquales, quam tres. Nam, minuendo radices propositæ æquationis quantitate, quæ unam ex radicibus æqualibus adæquet; generaliter necesse est, ut versus finem tot in nova æquatione termini evanescant, quotus est numerus radicum æqualium. Unde, capiendo coefficientes termi-
* art. 566. norum evanescentium methodo, superius * tra-
& seqq. dita, iisdemque zero æquatis; habebuntur illæ eædem æquationes, in quibus numerus radicum æqualium gradatim minui debet.

V. *Ratio solvendi problemata de maximis, & minimis.*

840. UT expositæ hactenus theoriæ de reductione æquationum, quæ duas, aut plures continent radices æquales, necessitas nota evadat; non abs re erit, hoc loco notare, dari nonnulla problemata, in quorum resolutione hujusmodi æquationes occurrunt. Hujus generis sunt omnia illa, in quibus quantitates quæsitæ debent esse maximæ, vel minimæ omnium aliarum similium quantitatum. Si enim quantitas aliqua in suo incessu increscat, aut decrescat usque ad certum terminum, post quem

rursus minuatur, aut augeatur; utique sub termino illo maxima, vel minima fiet. Unde, ratione alterius decrementi, aut incrementi, quod patitur, omnino necesse est, ut æquatio, per quam quantitas illa determinatur, duas habeat radices æquales.

841. Ita, si AB sit recta aliqua, longitudine data, super quam ex A ad B progrediatur punctum aliquod M; utique rectangulum AMB majus semper, ac majus evadet, usque donec punctum M tetigerit medium ipsius AB. At, ubi ex medio illo ulterius pergit versus B, tunc per contrarium idem rectangulum AMB fiet semper minus, ac minus. Quare, si recta AB secta sit bifariam in C; erit ACB maximum omnium rectangulorum, quæ sub ipsius AB segmentis continentur. Unde, sicuti, quum rectangulum AMB, debet esse minoris magnitudinis, quam quæ maximo competit, ipsa AM duos valores admittet, unum quidem minorem, alterum majorem, quam AC; ita in hypothesi, quod idem rectangulum esse debet omnium maximum, duo illi valores coibunt in unum, atque adeo æquales fient inter se. FIG. 33.

842. Id quum ita sit, en modo, quo pacto determinari potest, quod maximum omnium rectangulorum AMB, quæ sub ipsius AB segmentis continentur, habetur, secando rectam AB bifariam in C. Ponatur recta data AB $= a$, & portio AM $= x$. Fiet igitur portio reliqua BM $= a - x$, & rectangulum AMB $= ax - x^2$. Sit porro b^2 magnitudo indeterminata rectanguli; jamque fiet æquatio $ax - x^2 = b^2$, sive $x^2 - ax + b^2 = 0$. Supponamus modo, in

æquatione ista incognitam x duas habere radices æquales. Et, multiplicando terminos ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; orietur $2x^2 - ax = 0$, hoc est $2x - a = 0$, sive etiam $x = a : 2$. Unde in hypothesi, quod rectangulum AMB debet esse omnium maximum, plane necesse est, ut portio AM adæquet semissem ipsius AB.

843. Jam, quum æquatio duas habet radices æquales, ad eruendam unamquamque earum radicum, vidimus superius *, posse terminos ejus multiplicari per terminos cujuscumque progressionis arithmeticæ. Quare, sicuti æquationis $x^2 - ax + b^2 = 0$ termini multiplicati sunt per 2, 1, 0; ita multiplicare eos licebit per 3, 2, 1. Verum hoc agentes, inveniemus æquationem $3x^2 - 2ax + b^2 = 0$, unde nequaquam eruitur $x = a : 2$. Id autem minime difficultatem facere debet. Nam res ex eo dependet, quod ipsius b^2 valor ignoratur. Plane vero, scribendo loco b^2 valorem ejus generalem $ax - x^2$; eadem æquatio fiet $3x^2 - 2ax + ax - x^2 = 0$, hoc est $2x^2 - ax = 0$, ex qua rursus infertur, ut antea *, $x = a : 2$.

* Art. 808.

* Art. 842.

844. Invenienda sit modo positio puncti M, in qua solidum ex AM quadrato in BM fiat omnium maximum. Ponatur, ut antea *, AB $= a$, & AM $= x$. Quumque fiat BM $= a - x$, erit $ax^2 - x^3$ expressio solidi prædicti. Quare, si ejus indeterminata magnitudo vocetur b^3; orietur æquatio $ax^2 - x^3 = b^3$, sive $x^3 - ax^2 + b^3 = 0$. Finge jam, æquationem istam duas habere radices æquales, & multiplica terminos ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet inco-

* Art. 842.

cognita x; sicque nova emerget æquatio $3x^3 - 2ax^2 = 0$: quæ, sicuti reducitur ad $3x - 2a = 0$, ita dabit $x = 2a : 3$. Ex quo patet, solidum ex AM quadrato in BM fieri omnium maximum, si utique portio AM adæquet duas tertias partes totius rectæ datæ AB.

845. Invenienda sit adhuc positio puncti M, in qua productum ex cubo portionis AM in portionem reliquam BM omnium maximum fiat. Sane, manentibus semper $AB = a$, $AM = x$, & $BM = a - x$; erit $ax^3 - x^4$ generalis expressio ejus producti: proindeque, si vocetur b^4 ejusdem indefinita magnitudo; fiet æquatio $ax^3 - x^4 = b^4$, sive $x^4 - ax^3 + b^4 = 0$. Jam æquatio ista, ubi productum illud omnium maximum evadit, duas debet radices æquales habere. Quare, multiplicatis terminis ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; exhibebit hæc altera æquatio $4x^4 - 3ax^3 = 0$ valorem incognitæ x in ea, de qua agitur, specie: & propterea, quum exinde eruatur $x = 3a : 4$; liquet, productum ex cubo ipsius AM in portionem reliquam BM fieri omnium maximum, ubi portio AM adæquat tres quartas partes ipsius AB.

846. Sed generaliter definienda sit positio puncti M, in qua omnium maximum evadat productum ex ea potestate portionis AM, quæ habet m pro suo exponente, in portionem reliquam BM. Maneant adhuc $AB = a$, $AM = x$, & $BM = a - x$; jamque generalis expressio ejus producti erit $ax^m - x^{m+1}$. Quare, si ejusdem indefinita magnitudo vocetur b^{m+1}; habebitur æquatio $ax^m - x^{m+1} = b^{m+1}$, sive $x^{m+1} - ax^m +$

$b^{m+1} = 0$. Multiplicentur nunc termini hujus æquationis per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; & nova æquatio $(m+1)$. $x^{m+1} - max^m = 0$ exhibebit valorem incognitæ x, ubi productum illud debet esse omnium maximum. Unde, quum ex ea æquatione eruatur $x = ma : (m+1)$; liquet, quæsito satisfieri, si fiat, ut AM ad AB sit in ea ratione, quam habet m ad $m+1$.

847. Ut aliud ejusdem generis problematum exemplum afferamus, esto recta positione data

FIG. 34. AB, & angulus rectilineus XCZ mobilis circa datum punctum C. Quæritur, quænam esse debeat positio hujus anguli, ut portio rectæ AB, intercepta cruribus CX, CZ, fiat omnium minima. Sit EF intercepta portio in quavis ejus anguli positione; & ratio laterum CE, CF ponatur æqualis ei, quam habet x ad a. Demittantur super ipsis CE, CF perpendicula FG, EH. Et, sicuti æquiangula fiunt triangula duo CFG, CEH; ita, ob datum angulum XCZ, dabuntur in utroque triangulo rationes laterum.

848. Habeant itaque, tum latera CF, CG, FG, cum latera CE, CH, EH illas easdem rationes, quæ sunt inter a, b, c. Et, quemadmodum, si ponatur CE $= y$, fiet CF $= ay : x$; ita, ob assumptas istas rationes, erit CH $= by : a$, EH $= cy : a$, CG $= by : x$, & FG $= cy : x$: proindeque erit ulterius FH $= ay : x - by : a = (a^2y - bxy) : ax$, & EG $= y - by : x = (xy - by) : x$. Demittatur porro super EF perpendicularis CD, eritque; ut FG ad EG, ita CD ad ED; & ut EH ad FH, ita CD ad FD. Quare, posita CD $= d$, fiet ED $= (dx - bd) : c$,

& FD

& $FD = (ad^2 - bdx) : cx$; & consequenter erit tota $EF = (dx - bd) : c + (ad^2 - bdx) : cx = (dx^2 - 2bdx + ad^2) : cx$.

849. Hinc, si indefinita longitudo ejusdem EF vocetur f; orietur æquatio $(dx^2 - 2bdx + ad^2) : cx = f$, sive $x^2 - (2b - cf : d)\, x + a^2 = 0$: proindeque, multiplicatis terminis ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; erit $2x^2 - (2b - cf : d)\, x = 0$, sive $x = b + cf : 2d$ æquatio, quæ determinat valorem incognitæ x in hypothesi, quod EF debet esse omnium minima. Cumque, substituto loco f valore ejus generali $(dx^2 - 2bdx + ad^2) : cx$, eadem illa æquatio evadat $x^2 = a^2$; liquet, fore $x = a$: & propterea, quia ratio laterum CE, CF debet esse æqualitatis; fiet EF omnium minima, ubi angulus XCZ bisectus est per ipsam CD.

850. Nolo autem hoc loco reticere, quod, si termini æquationis $x^2 - (2b - cf : d)\, x + a^2 = 0$, ut ducti sunt in numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, ita multiplicentur per numeros 1, 0, − 1, qui similiter sunt arithmetice proportionales; statim habebitur æquatio $x^2 - a^2 = 0$, determinans valorem incognitæ x in hypothesi, quod EF debet esse omnium minima. Unde, hac occasione, notetur hic velim, quod, pro hisce æquationibus, quas indeterminata quantitas ingreditur, præstat, talem progressionem arithmeticam eligere, ut multiplicari debeat per zero terminus ille, in quo ea quantitas indeterminata reperitur.

SECTIO IV.

De Resolutione Æquationum Irreducibilium.

851. Reliquum jam est, ut æquationum irreducibilium, seu in propria sua sede existentium, resolutionem ostendamus. Hujusmodi resolutio est totius artificii analytici coronis, ac complementum; quum, ope ejus, omnes incognitæ valores habeantur. Et quidem, quum æquatio est secundi gradus, jam
*art.123. vidimus supra *, qua ratione resolutio ejus possit obtineri: nimirum, si translato ad partem alteram ultimo æquationis termino, addatur utrinque quadratum, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Sic enim prior pars æquationis quadratum evadet perfectum; adeoque, per extractionem quadratæ radicis, utraque ejus radix habebitur.

852. Hæ duæ interim radices oriuntur semper reales, ubi ultimus æquationis terminus afficitur signo negativo. Sed, ubi signum ejus est positivum; erunt quidem reales, quum ipse ultimus terminus non est major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato; erunt vero imaginariæ, quum vicissim est major. Atque hæc quoque, quum satis superque supe-
art.437. rius ostensa sint, tum per ipsam æquationum re-
504. solutionem, cum ope principiorum, quibus investigatio radicum imaginariarum innititur;

su-

superfluum ducimus, rursus hoc loco proferre.

853. Itaque, omissis æquationibus secundi gradus, progrediemur ad resolutionem æquationum, quæ sunt gradus altioris. Et quamquam una eademque sit ratio æquationes omnes resolvendi; attamen, ut ea omnia prosequamur, quæ communiter in Algebræ Elementis tradi solent; primo quidem explicabimus seorsim resolutionem æquationum tertii gradus; tum etiam sejunctim ostendemus, quo pacto resolutio æquationum quarti gradus communiter obtinetur. Ac denique generalem æquationes resolvendi methodum in medium afferemus.

CAPUT I.

Resolutio æquationum tertii gradus.

854. Diximus superius *, cujuscumque gradus æquationes, vel puras esse, vel affectas. Vocavimus puras, in quibus omnes termini intermedii desunt. Vocavimus vero affectas, in quibus vicissim, vel omnes, vel aliqui ex terminis intermediis extant. Itaque, æquationum tertii gradus resolutionem traditури, eas primum considerabimus, quæ puræ sunt, & dumtaxat primum, & ultimum terminum habent. Neque id mirum videri debet. Nam, per extractionem radicis cubicæ, unicam tantum æquationum harum radicem assequimur; adeoque, saltem pro eruendis duabus aliis radicibus, quas eædem æquationes admittunt, arte aliqua opus est. *art. 338.

I. Ratio resolvendi æquationes puras tertii gradus.

855. Quemadmodum æquationes puræ secundi gradus reducuntur, vel ad hanc formulam $x^2 - q = 0$, vel ad hanc aliam $x^2 + q = 0$; ita quoque æquationes puræ tertii gradus, vel erunt hujus formæ $x^3 - r = 0$, vel etiam istius $x^3 + r = 0$. Interim in æquationibus puris secundi gradus utraque radix habetur, per radicis quadratæ extractionem; sed in puris æquationibus tertii gradus, extrahendo radicem cubicam, unica tantum radix eruitur.

856. Quantum enim ad æquationes puras secundi gradus, si habeatur $x^2 - q = 0$; erit transponendo, $x^2 = q$; adeoque, extracta utrinque quadrata radice, fiet, tum $x = + \sqrt{q}$, cum $x = - \sqrt{q}$. Et par est ratio, si fuerit $x^2 + q = 0$. Sed non perinde evenit in æquationibus puris tertii gradus. Nam, si habeatur $x^3 - r = 0$; erit quidem, per transpositionem, $x^3 = r$; verum, extrahendo utrinque radicem cubicam, fiet tantum $x = \sqrt[3]{r}$. Pariterque, si fuerit $x^3 + r = 0$, sive $x^3 = - r$; extractione radicis cubicæ, habebitur tantum $x = - \sqrt[3]{r}$.

857. Quum ergo eædem puræ æquationes tertii gradus, præter radicem inventam, alias duas habere debeant; ostendendum est, qua ratione, ex iisdem æquationibus aliæ duæ istæ radices erui possint. Primo itaque eruere eas licebit, ope divisionis: scilicet, dividendo æquationem, de qua agitur, per æquationem simplicem, inventam suam radicem exhibentem. Sic

hic enim eadem illa æquatio deprimetur * ad *art.405. aliam secundi gradus; adeoque binæ hujus radices dabunt radices optatas.

858. Hac ratione, quia in prima formula habetur $x^3 - r = 0$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, est $x - \sqrt{^3 r} = 0$; dividere oportebit $x^3 - r = 0$ per $x - \sqrt{^3 r} = 0$. Itaque, quia, facta ista divisione, oritur quotiens $x^2 + x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2}$; erit $x^2 + x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2} = 0$ æquatio secundi gradus, quæ, ducta in æquationem simplicem $x - \sqrt{^3 r} = 0$, producit æquationem propositam $x^3 - r = 0$: proindeque binæ radices hujus æquationis $x^2 + x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2} = 0$ dabunt alias duas ipsius $x^3 - r = 0$.

859. Eadem ratione, quia in secunda formula habetur $x^3 + r = 0$, & æquatio simplex, quæ continet radicem suam inventam, est $x + \sqrt{^3 r} = 0$; dividere oportebit $x^3 + r = 0$ per $x + \sqrt{^3 r} = 0$. Quocirca, quia quotiens hujus divisionis est $x^2 - x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2}$; erit $x^2 - x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2} = 0$ æquatio secundi gradus, quæ, multiplicata per æquationem simplicem $x + \sqrt{^3 r} = 0$, producit propositam æquationem $x^3 + r = 0$. Unde binæ radices hujus æquationis $x^2 - x\sqrt{^3 r} + \sqrt{^3 r^2} = 0$ præbebunt alias duas ipsius $x^3 + r = 0$.

860. Possunt aliæ duæ radices utriusque æquationis puræ tertii gradus inveniri etiam, assumendo indeterminate æquationem secundi gradus, quæ continet radices illas; eamque multiplicando per æquationem simplicem, quæ exhibet radicem jam inventam. Quum enim ex hypothesi æquatio, quæ producitur, sit ejusdem for-

formæ cum æquatione, de qua agitur; poterunt utriusque termini inter se mutuo comparari: proindeque, instituta comparatione, habebuntur tot aliæ æquationes, quot ad determinandam eam secundi gradus requiruntur.

861. Referat itaque $x^2 + ax + b = 0$ æquationem secundi gradus, quæ duas alias continet radices. Jamque, si æquatio fuerit $x^3 - r = 0$, multiplicare oportebit $x^2 + ax + b = 0$ per $x - \sqrt{^3r} = 0$. Et quoniam, facta multiplicatione, producitur $x^3 + (a - \sqrt{^3r})x^2 + (b - a\sqrt{^3r})x - b\sqrt{^3r} = 0$; erit æquatio ista ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 - r = 0$. Unde, collatis terminis unius cum terminis alterius, fiet $a - \sqrt{^3r} = 0$, $b - a\sqrt{^3r} = 0$, & $b\sqrt{^3r} = r$; adeoque, quum harum æquationum prior det $a = \sqrt{^3r}$, & utraque aliarum præbeat $b = \sqrt{^3r^2}$; æquatio secun-
*art.858. di gradus $x^2 + ax + b = 0$ fiet, ut supra *, $x^2 + x\sqrt{^3r} + \sqrt{^3r^2} = 0$.

862. Quod si vero æquatio fuerit $x^3 + r = 0$; tunc multiplicare oportebit $x^2 + ax + b = 0$ per $x + \sqrt{^3r} = 0$. Quumque, multiplicatione peracta, oriatur $x^3 + (a + \sqrt{^3r})x^2 + (b + a\sqrt{^3r})x + b\sqrt{^3r} = 0$; erit æquatio ista ejusdem formæ cum æquatione, de qua est quæstio, $x^3 + r = 0$. Quare, comparando terminos unius cum terminis alterius, fiet $a + \sqrt{^3r} = 0$, $b + a\sqrt{^3r} = 0$, & $b\sqrt{^3r} = r$: proindeque, quia harum æquationum prior præbet $a = -\sqrt{^3r}$, & utraque aliarum dat $b = \sqrt{^3r^2}$; æquatio secun-
*art.859. di gradus $x^2 + ax + b = 0$ evadet, ut antea *, $x^2 - x\sqrt{^3r} + \sqrt{^3r^2} = 0$.

863. Sed notetur hoc loco velim, pro

utra-

t raque æquatione pura tertii gradus alias duas radices imaginarias oriri. Nam, ut modo vidimus, æquatio secundi gradus, quæ eas continet radices, est $x^2 + x\sqrt{3}r + \sqrt{3}r^2 = 0$, ubi habetur $x^3 - r = 0$; estque $x^2 - x\sqrt{3}r + \sqrt{3}r^2 = 0$, quum vicissim fuerit $x^3 + r = 0$. Plane vero in utroque casu ultimus terminus talis æquationis afficitur signo $+$, & est major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Quare per ea, quæ superius * ostensa sunt, duæ ejus radices imaginariæ erunt. *Art. 437. 504.

864. Quum ergo quæritur radix cubica datæ alicujus quantitatis; præter eam realem, quæ vulgari methodo extrahitur, dabuntur semper aliæ duæ imaginariæ. Nam, profecto, si radix cubica numeri 8 vocetur x; fiet æquatio $x^3 = 8$, sive $x^3 - 8 = 0$. Plane vero, sicuti æquationis hujus radix una est 2; ita, dividendo $x^3 - 8 = 0$ per $x - 2 = 0$, habebitur æquatio secundi gradus $x^2 + 2x + 4 = 0$: quæ dabit etiam, tum $x = -1 + \sqrt{-3}$, cum $x = -1 - \sqrt{-3}$. Quare radix cubica numeri 8, non modo erit 2, verum etiam, & $-1 + \sqrt{-3}$, & $-1 - \sqrt{-3}$.

II. *Resolutio æquationum affectarum tertii gradus.*

865. ÆQuationes tertii gradus affectæ multiplicis speciei esse possunt. In iis namque oriri potest affectio; vel quia secundus terminus habetur, & tertius deficit; vel vicissim, quia tertius habetur, & secundus deest; vel denique, quia uterque ex terminis intermediis in iis reperitur. Quia vero regula satis ex-

pe-

*art.578. pedita habetur *, pro auferendo secundo termino ex quavis æquatione; satius erit, eas tantum æquationes affectas tertii gradus considerare, quæ secundo termino carent.

866. Hujusmodi æquationes, pro diversitate signorum, quibus affici possunt termini ejus, ad quatuor formulas passim reducuntur. Sed, nulla habita signorum ratione, comprehendemus omnes sub hac formula generali $x^3 + qx + r = 0$. Nec dubium esse potest, quin, tradita hujus formulæ resolutione, omnium omnino æquationum cubicarum, quæ secundo termino carent, resolutio habeatur.

867. Pro assequenda igitur una ex radicibus hujus æquationis $x^3 + qx + r = 0$, sit $x + a + b = 0$ æquatio simplex, quæ eam continet radicem. Et quemadmodum, transponendo, erit $x = -a - b$; ita, factis cubis, habebitur $x^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$, sive $x^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$. Quum autem sit $x = -a - b$; multiplicando per $-3ab$, erit etiam $-3abx = 3a^2b + 3ab^2$; adeoque, substitutione peracta, erit $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

868. Comparentur modo termini hujus æquationis $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$ cum terminis æquationis, de qua agitur, $x^3 + qx + r = 0$. Et, comparatione ista, fiet, tum $q = -3ab$, cum $r = a^3 + b^3$. Plane vero, ope harum æquationum, facile erit, definire valores ipsarum a, & b; & consequenter unam assequi radicem ipsius æquationis $x^3 + qx + r = 0$.

869. Quum enim in prima æquatione habeatur $q = -3ab$; erit etiam $-q : 3a = b$, & $-q^3 : 27a^3 = b^3$. Unde, scribendo loco b^3,

valorem istum, æquatio altera $r = a^3 + b^3$ evadet $r = -q^3 : 27a^3 + a^3$, sive $a^6 - ra^3 = q^3 : 27$. Quamquam autem æquatio ista ad sex dimensiones ascendat, est tamen derivativa secundi gradus: proindeque ex ea valor ipsius a nullo negotio eruetur.

870. Nimirum, quum sit $a^6 - ra^3 = q^3 : 27$: addito utrinque quadrato, quod fit ex semisse ipsius r; erit quoque $a^6 - ra^3 + r^2 : 4 = q^3 : 27 + r^2 : 4$. Quare, extracta ex utraque parte radice quadrata, fiet $a^3 - r : 2 = \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$: & propterea, quum sit $a^3 = r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$, per extractionem radicis cubicæ, erit tandem $a = \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$.

871. Determinata quantitate a, valor alterius b illico notus evadet. Quum enim sit * $q = -3ab$, erit $b = -q : 3a$; adeoque, ponendo loco a valorem suum, fiet $b = -q : 3\sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$. Unde, quemadmodum æquatio simplex, unam exhibens radicem, erat $x + a + b = 0$; ita, substitutione peracta, eadem æquatio fiet $x + \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} - q : 3\sqrt[3]{[r : 2 + (q^3 : 27 + r^2 : 4)]} = 0$. *art. 869.

872. Potest ejusdem radicis valor alio quoque modo designari. Jam enim habebatur * $a^6 - ra^3 + r^2 : 4 = q^3 : 27 + r^2 : 4$. Plane vero, per extractionem quadratæ radicis, habetur etiam $a^3 - r : 2 = -\sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$. Unde, quum fiat $a = \sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$; erit $b = -q : 3a = -q : 3\sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$; & consequenter æquatio, radicem exhibens, $x + a + b = 0$ vertetur *art. 870.

in hanc aliam $x + \sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] - q : 3\sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = 0$.

873. Utramque interim revocare licebit ad hanc aliam $x + \sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] + \sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = 0$. Si enim multiplicetur $\sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]$ per $\sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]$ productum fiet $\sqrt{3}(r^2 : 4 - q^3 : 27 - r^2 : 4)$, hoc est $\sqrt{3} - (q^3 : 27)$, quod tantundem valet, ac $- q : 3$. Id vero quum ita sit, liquet fore, tam $- q : 3\sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = \sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]$, quam $- q : 3\sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = \sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]$.

874. In posterum ergo unam ex radicibus æquationis $x^3 + qx + r = 0$ non alia ratione designabimus, quam prout per hanc æquationem simplicem $x + \sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] + \sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = 0$ exhibetur. Inventa autem radice una alias duæ habebuntur, divisionis ope: nimirum, dividendo æquationem, de qua agitur, per æquationem simplicem, radicem jam inventam exhibentem. Sic enim æquatio deprimetur ad aliam secundi gradus; adeoque binæ hujus radices dabunt alias duas illius.

875. Et sane, si vocetur c radix inventa, erit $x - c = 0$ æquatio simplex, quæ eam exhibet radicem. Itaque dividere oportebit $x^3 + qx + r = 0$ per $x - c = 0$. Divisione autem instituta oritur in quotiente $x^2 + cx + c^2 + q$, & manet in dividendo $c^3 + qc + r$. Verum, quia residuum istud tantundem valet, ac zero, ut patet si loco c ponatur x; erit etiam $x^2 + cx + c^2 + q =$

$r = o$: proindeque duæ hujus æquationis radices exhibebunt alias duas ipsius $x^3 + qx + r = o$.

876. Sed notetur hoc loco velim, quod, sicuti prior radix æquationis $x^3 + qx + r = o$, exhibita per hanc aliam æquationem simplicem $x + \sqrt{3}[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] + \sqrt{3}[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}] = o$, est binomia, seu duas partes continet; ita utramque ejus partem ingreditur radix quadrata, extrahenda ex $q^3 : 27 + r^2 : 4$, hoc est $\sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$. Itaque, si fieri potest, ut quantitas $q^3 : 27 + r^2 : 4$ sit negativa; ejus quadrata radix erit imaginaria; & consequenter ipsa radix æquationis $x^3 + qx + r = o$ imaginariis quantitatibus expressa orietur.

877. Jam quantitas $q^3 : 27 + r^2 : 4$ fit negativa, quotiescumque in æquatione $x^3 + qx + r = o$ terminus qx afficitur signo negativo, estque $q^3 : 27$ major, quam $r^2 : 4$. Quare radix æquationis $x^3 + qx + r = o$ orietur expressa quantitatibus imaginariis, quotiescumque in ea tertius terminus negativo signo afficitur, & cubus ex triente sui coefficientis, positive sumptus, major est quadrato, quod fit ex ultimo termino dimidiato.

878. Id vero mirum proculdubio videri debet. Per ea enim, quæ superius * ostensa sunt, æquatio $x^3 + qx + r = o$ tunc quidem habet radices duas imaginarias, quotiescumque tertius terminus qx, vel afficitur signo positivo, vel affectus signo negativo, talem habet coefficientem, ut cubus ejus, positive sumptus, minor sit quadrato, quod fit ex semisse ultimi termi- *art. 510.

mi-

mini. Quare, ubi hæc locum habent, radix æquationis $x^3 + qx + r = 0$ fieri deberet imaginaria.

* art. 877. 879. Res interim, ut jam * ostensum est, longe secus accidit, & radix æquationis $x^3 + qx + r = 0$ prodit quantitatibus imaginariis expressa tunc tantum, quum omnes ejus radices esse debent reales. Idem autem evenit quoque in aliis duabus radicibus ejusdem æquationis. Nam,

* art. 875. quum eæ reperiri* debeant, ope hujus æquationis $x^2 + cx + c^2 + q = 0$, ubi quantitas c designat radicem inventam; liquet, eas quoque quantitatibus imaginariis expressas oriri.

880. Non perinde vero res est, quum eadem æquatio $x^3 + qx + r = 0$ unam habet radicem realem, & alias duas imaginarias. In hoc etenim casu, quemadmodum radix inventa exhibet radicem realem; ita aliæ duæ radices, inveniendæ ope æquationis $x^2 + cx + c^2 + q = 0$, prodibunt semper imaginariæ; quandoquidem ultimus terminus quadratę hujus æquationis positivo signo affectus emergit, itemque major quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato.

III. *Casus, qui dicitur, irresolutus æquationum cubicarum plenius expenditur.*

881. Ex iis, quæ modo dicta sunt de resolutione æquationum affectarum tertii gradus, abunde liquet, in hisce æquationibus duos casus sedulo distinguendos esse. Primus est, quum in iis una tantum radix est realis, & aliæ duæ imaginariæ. Alter est, quum

quum omnes ipsarum radices sunt reales. In priore casu realis illa radix, methodo tradita, semper potest exhiberi. Sed in altero casu unaquæque ex tribus radicibus, ope ejusdem methodi, non aliter haberi potest, quam per quantitates imaginarias expressa.

882. Hanc difficultatem, quæ occurrit in resolvendis æquationibus cubicis, quarum radices omnes sunt reales, norunt ipsimet Itali, qui primum tradiderunt resolutionem harum æquationum: quemadmodum colligere licet ex litteris, quæ inter Tartalcam, & Cardanum intercesserunt. Nec sane, post inventam regulam æquationes istas resolvendi, quisque eam perficere potuit. Unde non immerito gloriari possunt Itali, se Algebram perduxisse ad eum usque terminum, ad quem humani ingenii viribus poterat pervenire: quod candide fatetur solertissimus Auctor Historiæ Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1705.

883. Qua autem ratione fiat, ut, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, unaquæque earum oriatur quantitatibus imaginariis expressa, fingendo $x + a + b = 0$; exinde colligit Newtonus in sua Arithmetica Universali, quod, quum radices illæ eodem modo se habeant ad terminos æquationis, & indifferenter per incognitam designentur, deberent utique omnes eadem lege erui, & exprimi, qua una aliqua eruitur, & exprimitur. Unde, quia tres omnes lege prefata exprimere, impossibile est, quum quantitas $- a - b$, qua x designatur, multiplex esse nequeat; falsa erit hypothesis, quod x in casu, ubi triplex esse debet, sit

 æqua-

æqualis $-a-b$: & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi, mirum esse non debet.

884. Sed vereor, ne ita res sit, quemadmodum Vir summus putat. Jam enim, quum sermo erat de reductione æquationum ad propriam sedem, vidimus *, quantitatem determinandam per æquationem simplicem, quum multiplex esse debet, sic per analysim designari, ut prodeat adhuc indeterminata, hoc est æqualis quotienti, qui oritur, dividendo zero per zero. Itaque, quum hic quoque quantitas $-a-b$, qua x designatur, multiplex sit oporteat; eam, non impossibilem, sed indeterminatam exhibere deberet analysis. Et deinde, si Viri Clarissimi ratio locum haberet, obtineret etiam, quum aliæ duæ æquationis radices sunt imaginariæ; quandoquidem utraque indifferenter quoque per incognitam designatur.

* art. 754.

885. Quæ quum ita sint, asserere non vereor, ex aliis principiis hujus rei mysterium petendum esse, quæ nec quisquam investigavit adhuc, nec ab ullo unquam poterunt investigari. Scio, nonnullos non adeo deploratum casum existimasse. Nam, etsi radix illa realis sit expressa per latera cuborum, qui quantitatem continent imaginariam; fieri tamen potest, ut expressio realis evadat; nimirum, si latera illa extrahantur; quum sic quantitas imaginaria, velut contrariis signis in cubis illis affecta, evanescat, nec amplius occurrat; quem in finem eo vires omnes intenderunt, ut, qua ratione elici possit radix cubica, etiam ex binomiis imaginariis, ostenderent,

886.

886. Sane non irritum laborem istorum existimo; quin magnum eorum conatum summopere laudo. Sed id consequuti sunt, quod alia via potest obtineri; quandoquidem optatum finem sunt adepti tunc tantum, quum una ex radicibus æquationis est realis simul, & rationalis. Nec equidem aliter res esse poterat. Quum enim binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ, unum contineant terminum rationalem, & alterum radicalem; tales quoque erunt* radices cubicæ illorum binomiorum. Unde, quum in summa istarum radicum se mutuo destruant termini radicales, in quibus latet quantitas imaginaria; remanebunt tantum termini rationales, atque adeo summa tota commensurabilis erit.

*lib. 1. art. 253.

887. Sed exemplo id ostendamus, simulque methodum indicemus, qua procedendum est analytice in extractione radicum ex binomiis. Itaque, si æquatio fuerit $x^3 - 15x - 4 = 0$; hæc, comparata cum formula generali $x^3 + qx + r = 0$, dabit $q = -15$, & $r = -4$. Unde, quum fiat $r : 2 = -2$, & $q^2 : 27 + r^2 : 4 = -121$; æquatio simplex $x + \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} + \sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} = 0$, vertetur in hanc aliam $x + \sqrt[3]{(-2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(-2 - \sqrt{121})} = 0$, sive etiam $x - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} - \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = 0$: proindeque erunt $2 - \sqrt{-121}$, & $2 + \sqrt{-121}$ binomia, ex quibus radices cubicæ sunt extrahendæ.

888. Assumatur ergo binomium $2 + \sqrt{-121}$, & referat $a + \sqrt{-b}$ ejus binomii radicem cubicam. Quia igitur cubus ex $a + \sqrt{-b}$ est (a^3

$-3ab) - (3a^2 + b)\sqrt{-b}$; erit terminus ejus rationalis $a^3 - 3ab = 2$, & terminus radicalis $-(3a^2 + b)\sqrt{-b} = \sqrt{-121}$. Eleventur ad quadratum partes utriusque æquationis; & una fiet $a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 4$; altera $9a^4b - 6a^2b^2 + b^3 = 121$. Unde, quum additæ simul dent æquationem istam $a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3 = 125$; fiet hæc, per extractionem radicis cubicæ, $a^2 + b = 5$; & consequenter erit $b = 5 - a^2$.

889. Hinc, in æquatione $a^3 - 3ab = 2$ posito loco b valore ejus $5 - a^2$, habebitur $4a^3 - 15a = 2$, sive $a^3 - 15a:4 - 1:2 = 0$, aut etiam $c^3 - 15c - 4 = 0$, si, ad tollendas fractiones, scribatur $c:2$ loco a. Et quoniam termini hujus æquationis evanescunt, si loco c ponatur 4; erit proinde $c = 4$; atque adeo, quum sit $a = c:2$, erit $a = 2$; & consequenter b, cujus valor est* $5 - a^2$, fiet æqualis unitati. Unde radix cubica binomii $2 + \sqrt{-121}$, repræsentata per $a + \sqrt{-b}$, erit $2 + \sqrt{-1}$. Eadem ratione radix cubica alterius binomii $2 - \sqrt{-121}$ fiet $2 - \sqrt{-1}$. Quocirca, quum summa utriusque radicis sit 4; erit $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = 4$, atque adeo 4 etiam erit radix æquationis $x^3 - 15x - 4 = 0$.

*art. 888.

890. Hæc itaque est methodus, qua radices ex binomiis extrahuntur analytice, & cujus ope expressio imaginaria mutatur in realem. Sed liquet, mutationem istam tunc demum fieri posse, quum radix, per quantitates imaginarias expressa, est realis simul, & rationalis; quandoquidem æquatio, per quam determinanda est quantitas a, non modo est ejusdem formæ cum æquatio-

tione principali, verum etiam datam relationem habet ad eam. Unde, qui, per extractionem racis cubicæ ex binomiis, credunt, difficultatem omnem superari, ii rem non satis perpendisse videntur. Quem in finem, concludere licebit, casum, quum omnes æquationis cubicæ radices sunt reales, esse omnino deploratum, nec intra cancellos calculi algebraici posse contineri.

891. Cæterum, methodo tradita *, extrahi poterit radix cubica, non modo ex binomiis, quæ unum terminum habent rationalem, & alterum radicalem; verum etiam ex binomiis, quorum uterque terminus est radicalis. Proponatur, exempli gratia, binomium $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$; & oporteat, ex eo radicem cubicam extrahere. Quoniam uterque binomii terminus est radicalis; ejusdem formæ erit * etiam ipsius cubica radix. Itaque referat $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ radicem istam. Jam cubus ex $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $(a + 3b)\sqrt{a} + (3a + b)\sqrt{b}$. Quare, comparando terminos ejus cum terminis binomii propositi; habebuntur æquationes duæ, quarum una erit $(a + 3b)\sqrt{a} = 9\sqrt{3}$, & altera $(3a + b)\sqrt{b} = 11\sqrt{2}$. *lib. 1. art. 253.

892. Quadratis autem æquationibus istis, una fiet $a^3 + 6a^2b + 9ab^2 = 243$, & altera $9a^2b + 6ab^2 + b^3 = 242$: proindeque, per mutuam ipsarum subductionem, habebitur $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 1$; &, per radicis cubicæ extractionem, $a - b = 1$. Quum vero hinc fiat $b = a - 1$, posito in æquatione $a^3 + 6a^2b + 9ab^2 = 243$ loco b valore illo, orietur vice ejus hæc alia $16a^3 - 24a^2 + 9a = 243$, ubi a tantundem valebit, ac 3. Unde, quum sit $a - 1 = 2$; erit etiam $b = 2$: & propterea radix

cubica propositi binomii $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$, exhibita per $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, erit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

IV. *Alia æquationes affectas tertii gradus resolvendi ratio.*

893. Æquationes affectæ tertii gradus, quæ secundo termino carent, possunt etiam resolvi alia ratione : nimirum, assumendo indeterminate tres radices ipsarum, & ex iis aliam æquationem constituendo. Nam, comparatione hujus æquationis cum ea, de qua agitur, habebuntur duæ aliæ æquationes : quarum ope, facile erit, radices illas determinare. Primo autem expendemus casum, quum una tantum radix est realis, & aliæ duæ imaginariæ. Deinde in eum inquiremus, quum omnes radices sunt reales.

894. Referant ergo $a + \sqrt{-b^2}$, & $a - \sqrt{-b^2}$ radices duas imaginarias. Et, ob defectum secundi termini, fiet * $-2a$ radix realis.
*art.447.
Tres ergo æquationes simplices, quæ istas continent radices, erunt $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$, & $x + 2a = 0$. Unde, sicuti priores duæ, multiplicatæ per se invicem, præbent $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$; ita, multiplicando istam per tertiam æquationem simplicem $x + 2a = 0$, prodibit æquatio tertii gradus $x^3 + (b^2 - 3a^2)x + (2a^3 + 2ab^2) = 0$.

*art.366.
895. Sit jam, ut antea *, $x^3 + qx + r = 0$ æquatio proposita. Et, comparatis terminis unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ æquationes, quarum una erit $b^2 - 3a^2 = q$, & altera $2a^3 + 2ab^2 = r$. Quia ergo in prima

ista.

ſtarum æquationum habetur $b^2 - 3a^2 = q$, ſive $b^2 : 3 - a^2 = q : 3$; elevando utramque partem ad cubum, erit $b^6 : 27 - a^2b^4 : 3 + a^4b^2 - a^6 = q^3 : 27$. Et ſimiliter, quia in ſecunda æquatione habetur $2a^3 + 2ab^2 = r$, ſive $a^3 + ab^2 = r : 2$; elevando utramque partem ad quadratum, erit $a^6 + 2a^4b^2 + a^2b^4 = r^2 : 4$.

896. Hinc, per additionem utriuſque æquationis, habebitur quoque $b^6 : 27 + 2a^2b^4 : 3 + 3a^4b^2 = q^3 : 27 + r^2 : 4$; atque adeo, extrahendo hinc inde quadratam radicem, erit $b^3 : 3\sqrt{3} + a^2b\sqrt{3} = \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$. Erat autem $a^3 + ab^2 = r : 2$. Quare, ſicuti additione fit $a^3 + a^2b\sqrt{3} + ab^2 + b^3 : 3\sqrt{3} = r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$; ita ſubtractione erit $a^3 - a^2b\sqrt{3} + ab^2 - b^3 : 3\sqrt{3} = r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}$. Et, per extractionem radicis cubicæ, erit; tam $a + b : \sqrt{3} = \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$, quam $a - b : \sqrt{3} = \sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$.

897. Addantur modo ſimul duæ iſtæ poſtremæ æquationes; & habebitur $2a = \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} + \sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]}$. Unde in æquatione ſimplici $x + a = 0$, quæ continet radicem realem æquationis $x^3 + qx + r = 0$, ponendo loco $2a$ inventum valorem, prodibit $x + \sqrt[3]{[r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} + \sqrt[3]{[r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 + r^2 : 4)}]} = 0$: quæ quidem eſt illa eadem, in quam ſuperius * incidimus, aſſumendo indeterminate dumtaxat radicem realem. *Art. 873.

898. Determinata radice reali, aliæ binæ imaginariæ nullo negotio definientur. Ubi enim cognitum habemus valorem ipſius $2a$, cogno-

ſcemus quoque, quid valet a, quidve etiam $3a^2$. Unde, quemadmodum æquatio $b^2 - 3a^2 = q$ præbet $b^2 = q + 3a^2$; ita, ſi in duabus æquationibus $x - a - \surd - b^2 = 0$, & $x - a + \surd - b^2 = 0$, quæ continent* radices imaginarias, loco b^2 ponatur valor ille, evadent eædem $x - a - \surd(-q - 3a^2) = 0$, & $x - a + \surd(-q - 3a^2) = 0$.

*art. 894.

899. Habeat nunc æquatio $x^3 + qx + r = 0$ omnes radices reales. Jamque, ſi duas earum referant $a + b$, & $a - b$; ob defectum ſecundi termini, fiet * $-2a$ radix tertia. Unde tres æquationes ſimplices, quæ iſtas continent radices, erunt $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, & $x + 2a = 0$: proindeque æquatio tertii gradus, quæ continua earum multiplicatione producitur, erit $x^3 - (3a^2 - b^2)x + (2a^3 - 2ab^2) = 0$.

*art. 447.

900. Quia autem æquatio propoſita eſt $x^3 + qx + r = 0$; comparando terminos unius ordine cum terminis alterius, habebuntur duæ æquationes, quarum una erit $-3a^2 - b^2 = q$, & altera $2a^3 - 2ab^2 = r$. Hinc, quia ex prima eruitur $-a^2 - b^2 : 3 = q : 3$; elevando utramque partem ad cubum, erit $-a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 : 3 - b^6 : 27 = q^3 : 27$. Et ſimiliter, quia ex ſecunda infertur $a^3 - ab^2 = r : 2$; elevando utramque partem ad quadratum, erit $a^6 - 2a^4b^2 + a^2b^4 = r^2 : 4$.

901. Addendo porro ſimul duas iſtas æquationes, habetur $-3a^4b^2 + 2a^2b^4 : 3 - b^6 : 27 = q^3 : 27 + r^2 : 4$. Et, extracta, ope quantitatum imaginariarum, radice quadrata, emergit $a^2b\surd - 3 - b^3 : 3\surd - 3 = \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)$

Erat

Erat autem $a^3 - ab^2 = r:2$. Quare, ficuti additione fit $a^3 + a^2b\sqrt{-3} - ab^2 - b^3 : 3\sqrt{-3} = r:2 + \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}$; ita subtractione erit $a^3 - a^2b\sqrt{-3} - ab^2 + b^3 : 3\sqrt{-3} = r:2 - \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}$. Et, per extractionem radicis cubicæ, habebitur, tam $a + b : \sqrt{-3} = \sqrt[3]{[r:2 + \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]}$, quam $a - b : \sqrt{-3} = \sqrt[3]{[r:2 - \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]}$.

902. Addantur denique fimul duæ iftæ poftremæ æquationes; & orietur $2a = \sqrt[3]{[r:2 + \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]} + \sqrt[3]{[r:2 - \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]}$. Unde in æquatione fimplici $x + 2a = 0$, quæ continet unam ex tribus radicibus realibus propofitæ æquationis $x^3 + qx + r = 0$, ponendo loco a inventum valorem, prodibit $x + \sqrt[3]{[r:2 + \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]} + \sqrt[3]{[r:2 - \sqrt{(q^3:27 + r^2:4)}]} = 0$: quæ rurfus eft illa eadem, in quam fuperius * incidimus, affumendo indeterminate unam tantum ex radicibus realibus. * art. 873.

903. Determinata una radice reali, aliæ duæ nullo negotio definientur. Ubi enim cognitum habemus valorem ipfius $2a$, nec item nos latet, quid valet a, quidve $3a^2$. Unde, ficuti æquatio $-3a^2 - b^2 = q$ dat $b = \sqrt{(-q - 3a^2)}$; ita, fi in duabus æquationibus $x - a - b = 0$, & $x - a + b = 0$, quæ continent * alias duas radices reales, loco b ponatur valor ille, evadent eædem $x - a - \sqrt{(-q - 3a^2)} = 0$, & $x - a + \sqrt{(-q - 3a^2)} = 0$. * art. 899.

V. Vulgata æquationes affectas tertii gradus resolvendi ratio explicatur.

904. IN resolvendis æquationibus affectis tertii gradus, quæ secundo termino carent, aliam solet methodum Vulgus Algebristarum adhibere: quam visum est hoc loco subjungere; quia, quum primum Algebristæ resolutionem talium æquationum sunt aggressi, non aliam, quam istam methodum, usurparunt. Ostendemus itaq; primum, quo artificio in hanc methodum inciderint, & quibus principiis insistentes, eam excogitaverint. Quumque ejus inventio synthesi potius, quam analysi debeatur; ostendemus quoque, qua ratione eadem methodus analytice possit inveniri.

905. Ut ergo altius rem petamus, primi Algebræ Promotores, qui Arabes fuerunt, difficultatem, quæ in resolvendis æquationibus secundi gradus occurrit, non aliunde norunt oriri, quam, quia secundus terminus in iis reperitur. Itaque, quia, per compositionem quadrati, ostensam ab Euclide in suis Elementis, facile fuit eis, secundum terminum ab istis æquationibus tollere; difficultatem omnem removerunt, & æquationum secundi gradus resolutionem feliciter tradiderunt.

906. Postea, ad æquationes cubicas, seu trium dimensionum gradum facientes, difficultatem hic majorem sunt experti, ob duos terminos, qui impedimento sunt resolutioni istarum æquationum. Unde non ausi fuerunt, ulterius progredi. Itali autem, quum primum Algebræ stu-

ſtudio operam dederunt, quia norunt, in æquationibus ſecundi gradus nihil amplius poſſe deſiderari, in id ſtatim vires ſuas intenderunt, ut inquirerent, qua ratione reſolutio æquationum tertii gradus poſſet obtineri.

907. Nodum difficultatis & ipſi etiam agnoverunt. Sed, quum exploratum habuerint, Arabes reſolutionem æquationum ſecundi gradus obtinuiſſe, propter cognitam quadrati compoſitionem; crediderunt, poſſe ipſos reſolutionem æquationum cubicarum conſequi, ſi utique cubi compoſitionem perſpectam haberent. Hanc ergo inquirentes, deprehenderunt, cubum quantitatis duarum partium conſtare ex cubis ipſarum partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam; & ex triplo ejus, quod producitur, multiplicando viciſſim quadratum ſecundæ partis per primam.

908. Cognita cubi compoſitione, nec id, quod erat in votis, ſtatim ſunt aſſecuti. Nam, ope ejus, non aliud prima facie viſum eſt eis poſſe obtineri, quam, ut ſecundus terminus ex æquationibus cubicis tolleretur. Manebat itaque terminus tertius, qui non minus reſolutioni æquationum cubicarum obſtabat ſolitarius, quam ſi cum ſecundo jungeretur. Unde in re adeo ardua parum, aut nihil progreſſos fuiſſe, ipſimet norunt. Hoc utique, per cognitam cubi compoſitionem, ſaltem effectum crediderunt, quod, quum, ope ejus, facile eſſet, ſecundum terminum ex æquationibus cubicis tollere, difficultates, quæ aſcendunt ad cubum, ad pauciora, ut ipſi loquebantur, capitula poſſent revocari: nimi-

rum

rum ad eas tantum formulas, in quibus secundus terminus deest.

909. Id vero non parum deinde adjumento eis fuit in resolvendis æquationibus cubicis. Quum enim ea tantum capitula examinanda susceperint, quæ constant ex cubo, rebus, & numero, hoc est, quæ primum, tertium, & ultimum terminum habent; norunt, eo quidem totum negotium redigi, ut ex istis capitulis ita quidem tollendus esset terminus tertius, ut secundus jam deficiens rursus non occurreret. Itaque, quum cubi compositionem paulo diligentius fuissent contemplati, miro quidem conatu id, quod quærebant, tandem obtinuerunt.

910. Observarunt enim in cubo radicis binomiæ ter occurrere, tum productum ex quadrato primæ partis in secundam, cum productum ex quadrato secundæ partis in primam. Unde norunt, tolli quidem ex æquatione terminum tertium, nec rursus redire secundum; substituendo loco incognitæ, in æquatione contentæ, incognitam aliam, auctam, vel diminutam quotiente, qui oritur, dividendo coefficientem tertii termini per hanc aliam incognitam; hoc est auctam, quum tertius terminus afficitur signo negativo; & diminutam, quum vicissim signum habet positivum.

911. Verum quidem est, hoc artificio, non illico oriri æquationem cubicam, quæ secundo, & tertio termino caret, quum ea, in quam transformatur æquatio principalis, ad sex dimensiones ascendat. Sed nihilominus, quia æquatio ista subinde ad sextum gradum attollitur, ut tamen natura sua dicenda sit derivativa secundi

gra-

gradus; facile fuit eis, hac mediante, eam assequi, in quam unice annitebantur: nimirum, resolvendo æquationem inventam eadem ferme ratione, qua æquationes secundi gradus resolvuntur.

912. Hac igitur methodo docuerunt Itali resolutionem æquationum cubicarum, quæ ut clarior evadat, assumatur rursus æquatio generalis $x^3 + qx + r = 0$. Fiat $x + q : 3y = y$, sive $x = y - q : 3y$. Et, debitis substitutionibus factis, loco ejus æquationis habebitur hæc alia $y^3 - q^3 : 27y^3 + r = 0$, sive $y^6 + ry^3 = q^3 : 27$: quæ, tametsi ad sex dimensiones ascendat, est tamen derivativa secundi gradus. Unde, si ad utramque ejus partem addatur $r^2 : 4$, & extrahatur hinc inde quadrata radix; fiet $y^3 + r : 2 = \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)$.

913. Quum autem, transponendo, habeatur $y^3 = -r : 2 + \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)$; erit, per radicis cubicæ extractionem, $y = \surd^3[-r : 2 + \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)]$, sive $y = -\surd^3[r : 2 - \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)]$. Quumque fiat $q : 3y = -q : 3\surd^3[r : 2 - \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)] = \surd^3[r : 2 + \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)]$; superior illa æquatio $x = y - q : 3y$ mutabitur in hanc aliam $x = -\surd^3[r : 2 - \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)] - \surd^3[r : 2 + \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)]$, sive $x + \surd^3[r : 2 - \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)] + \surd^3[r : 2 + \surd(q^3 : 27 + r^2 : 4)] = 0$; adeoque hæc unam ex radicibus æquationis exhibebit.

914. Sed videamus modo, qua ratione hæc methodus resolvendi æquationes cubicas, quæ secundo termino carent, possit, analysis ope, investigari. Plane eo res tota reducitur, ut inveniatur quantitas, per quam sic transformari possit

$p^3 : 27 + a^3 + qx + r = 0$.

920. Fiant modo zero æquales termini omnes, in quibus x reperitur; & erit $3ayx - p^2x : 3 + qx = 0$, hoc est $3ay - p^2 : 3 + q = 0$: unde eruitur $a = (p^2 - 3q) : 9y$. Plane vero, deletis iis terminis, æquatio evadet $y^3 + apy - p^3 : 27 + a^3 + r$. Quare, scribendo pro a valorem inventum, eadem reducetur ad hanc aliam $y^3 + (p^3 - 3pq) : 9 - p^3 : 27 + (p^2 - 3q)^3 : 729y^3 + r = 0$, sive $y^6 + (2p^3 : 27 - pq : 3 + r)y^3 + p^6 : 729 - p^4q : 81 + p^2q^2 : 27 - q^3 : 27 = 0$, quæ ita quidem ad sex dimensiones ascendit, ut tamen pro derivativa secundi gradus debeat haberi.

921. Hinc ex hujusmodi æquatione facile erit valorem eruere incognitæ y. Quum enim habeatur $y^6 + (2p^3 : 27 - pq : 3 + r)y^3 + p^6 : 729 - p^4q : 81 + p^2q^2 : 27 - q^3 : 27 = 0$; erit $y^6 + (2p^3 : 27 - pq : 3 + r)y^3 = q^3 : 27 - p^2q^2 : 27 + p^4q : 81 - p^6 : 729$: proindeque, addendo ad utramque partem quadratum ex $p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem; fiet $y^3 + p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 = \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}$, sive etiam $y^3 = -p^3 : 27 + pq : 6 - r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}$; adeoque, per extractionem radicis cubicæ, erit $y = -\sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]}$.

922. Ut ergo rem in summam contrahamus, pro invenienda radice una cubicæ æquationis $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, posuimus $x = y - p : 3 + a$. Quia vero prodiit $a = (p^2 - 3q) : 9y$; erit

erit $x = y - p : 3 + (p^2 - 3q) : 9y$, sive etiam $x + p : 3 - y - (p^2 + 3q) : 9y = 0$. Nunc autem comperuimus $y = -\sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]}$. Quare erit $x + p : 3 + \sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]} + (p^2 - 3q) : 9\sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]} = 0$: & propterea ista simplex æquatio quæsitam radicem exhibebit.

923. Notetur interim hoc loco velim, $(p^2 - 3q) : 9\sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]}$ tantundem valere, ac $\sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]}$. Quare, substitutione peracta, erit quoque $x + p : 3 + \sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]} + \sqrt[3]{[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 + \sqrt{(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)}]} = 0$: & ea propter etiam in hac simplici æquatione quæsita radix propositæ æquationis continebitur.

924. Inventa radice una, facile deinde erit, alias duas ejusdem æquationis radices invenire. Neque enim aliud efficiendum est, quam dividere æquationem ipsam $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ per simplicem æquationem, radicem jam inventam exhibentem. Quum enim hac ratione eadem illa æquatio deprimatur * ad aliam secundi gradus; binæ hujus radices dabunt radices optatas. Si autem inventa radix vocetur c; fiet $x^2 + (p + c)x + (qc + c^2) = 0$ æquatio de- *Art. 405.

 pres-

$p^3:27 + a^3 + qx + r = 0$.

920. Fiant modo zero æquales termini omnes, in quibus x reperitur; & erit $3ayx - p^2x:3 + qx = 0$, hoc est $3ay - p^2:3 + q = 0$: unde eruitur $a = (p^2 - 3q):9y$. Plane vero, deletis iis terminis, æquatio evadet $y^3 + apy - p^3:27 + a^3 + r$. Quare, scribendo pro a valorem inventum, eadem reducetur ad hanc aliam $y^3 + (p^3 - 3pq):9 - p^3:27 + (p^2 - 3q)^3:729y^3 + r = 0$, sive $y^6 + (2p^3:27 - pq:3 + r)y^3 + p^6:729 - p^4q:81 + p^2q^2:27 - q^3:27 = 0$, quæ ita quidem ad sex dimensiones ascendit, ut tamen pro derivativa secundi gradus debeat haberi.

921. Hinc ex hujusmodi æquatione facile erit valorem eruere incognitæ y. Quum enim habeatur $y^6 + (2p^3:27 - pq:3 + r)y^3 + p^6:729 - p^4q:81 + p^2q^2:27 - q^3:27 = 0$; erit $y^6 + (2p^3:27 - pq:3 + r)y^3 = q^3:27 - p^2q^2:27 + p^4q:81 - p^6:729$: proindeque, addendo ad utramque partem quadratum ex $p^3:27 - pq:6 + r:2$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem; fiet $y^3 + p^3:27 - pq:6 + r:2 = \sqrt{}(q^3:27 - p^2q^2:108 + p^3r:27 - pqr:6 + r^2:4)$, sive etiam $y^3 = -p^3:27 + pq:6 - r:2. + \sqrt{}(q^3:27 - p^2q^2:108 + p^3r:27 - pqr:6 + r^2:4)$; adeoque, per extractionem radicis cubicæ, erit $y = -\sqrt[3]{}[p^3:27 - pq:6 + r:2 + \sqrt{}(q^3:27 - p^2q^2:108 + p^3r:27 - pqr:6 + r^2:4)]$.

922. Ut ergo rem in summam contrahamus, pro invenienda radice una cubicæ æquationis $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, posuimus $x = y - p:3 + a$. Quia vero prodiit $a = (p^2 - 3q):9y$;

erit

erit $x = y - p : 3 + (p^2 - 3q) : 9y$, sive etiam $x + p : 3 - y - (p^2 + 3q) : 9y = 0$. Nunc autem comperuimus $y = -\sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)]$. Quare erit $x + p : 3 + \sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)] + (p^2 - 3q) : 9\sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)] = 0$: & propterea ista simplex æquatio quæsitam radicem exhibebit.

923. Notetur interim hoc loco velim, $(p^2 - 3q) : 9\sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)]$ tantundem valere, ac $\sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 + \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)]$. Quare, substitutione peracta, erit quoque $x + p : 3 + \sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 - \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)] + \sqrt{3}[p^3 : 27 - pq : 6 + r : 2 + \sqrt{}(q^3 : 27 - p^2q^2 : 108 + p^3r : 27 - pqr : 6 + r^2 : 4)] = 0$: & ea propter etiam in hac simplici æquatione quæsita radix propositæ æquationis continebitur.

924. Inventa radice una, facile deinde erit, alias duas ejusdem æquationis radices invenire. Neque enim aliud efficiendum est, quam dividere æquationem ipsam $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ per simplicem æquationem, radicem jam inventam exhibentem. Quum enim hac ratione eadem illa æquatio deprimatur * ad aliam secundi gradus; binæ hujus radices dabunt radices optatas. Si autem inventa radix vocetur c; fiet $x^2 + (p + c)x + (qc + c^2) = 0$ æquatio de- *Art. 405.

pressa. Nam, etsi, instituta divisione, & comparato quotiente $x^2+px+cx+q+pc+c^2$, maneat in dividendo $r+qc+pc^2+c^3$; tamen residuum istud velut zero æquale haberi debet, quum evadat $r+qx+px^2+x^3$, si loco c substituatur incognita x.

925. Atque hæc est resolutio generalis æquationum cubicarum, sub qua omnes casus speciales continentur. Nam primo, si desit in æquatione secundus terminus, ita, ut sit $p=0$; æquatio simplex, exhibens radicem unam, fiet,
*art. 873. ut antea *, $x+\sqrt{3}[r:2-\sqrt{(q^3:27+r^2:4)}]+\sqrt{3}[r:2+\sqrt{(q^3:27+r^2:4)}]=0$; & æquatio secundi gradus, præbens alias duas radi-
*art. 875. ces, erit quoque, ut prius *, $x^2+cx+q+c^2=0$. Quod si vero deficiat in æquatione terminus tertius, adeo nempe, ut sit $q=0$; tunc æquatio simplex evadet $x+p:3+\sqrt{3}[p^3:27+r:2-\sqrt{(p^3r:27+r^2:4)}]+\sqrt{3}[p^3:27+r:2+\sqrt{(p^3r:27+r^2:4)}]=0$, & æquatio secundi gradus mutabitur in hanc aliam $x^2+(p+c)x+(pc+c^2)=0$.

CAPUT II.

Resolutio æquationum quarti gradus.

926. PRæcedenti capite egimus de resolutione æquationum tertii gradus, quam adeo quidem copiose prosecuti sumus, ut, non modo id omne traditum fuerit, quod vulgo circa talium æquationum resolutionem doceri solet, verum etiam plura alia, non subin-

inde vulgaria, in medium attulerimus. Nunc ad resolutionem æquationum quatuor dimensionum gradum faciemus, quam subinde etiam tradere conabimur, ut nihil omissum videretur, quod ad eam posset pertinere.

I. Duplex æquationum quarti gradus species distincta.

927. ÆQuationum, quarum sedes in quarto gradu subsistit, in duas classes distinguimus. Quædam enim sunt talis naturæ, ut affectionem cubicam contineant; aliæ vicissim ejusmodi sunt, ut ab affectione cubica sint prorsus immunes. Dicimus, æquationem quarti gradus affectionem cubicam continere, quotiescumque in radicibus ejus radicales cubicæ continentur. Dicimus vero, eandem æquationem immunem esse a cubica affectione, quum radices ejus nullas radicales cubicas comprehendunt.

928. Hanc distinctionem ponimus in æquationibus quarti gradus, ut recte intelligatur natura problematum, ad quæ æquationes illæ referuntur. Unumquodque etenim problema, cujus æquatio natura sua ad quartum gradum ascendit, quarti gradus esse dicetur. Sed interim, si æquatio fuerit immunis ab affectione cubica, poterit illud velut problema secundi gradus haberi. Quod si vero affectionem contineat cubicam, tanquam problema tertii gradus poterit considerari.

929. Æquationes quarti gradus ab affectione cubica sunt semper immunes, quotiescumque

primum tantum, & ultimum terminum habent; hoc est, quum non affectæ, sed puræ deprehenduntur. Hujusmodi æquationes, vel reducuntur ad hanc formam $x^4 - s = 0$, vel etiam ad hanc aliam $x^4 + s = 0$. Prioris formæ æquationes duas habent radices reales; & alias duas imaginarias; estque ex radicibus realibus una quidem positiva, altera negativa. Æquationes vero alterius formæ omnes radices imaginarias habent. Sed in utriusque formæ æquationibus inveniuntur radices istæ, extrahendo bis radicem quadratam.

930. Si enim habeatur $x^4 - s = 0$, sive $x^4 = s$; per unam quadratæ radicis extractionem, orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{s}$, & $x^2 = -\sqrt{s}$. Quare, extrahendo rursus ex utraque istarum quadratam radicem; prior dabit, tum $x = + \sqrt{+\sqrt{s}}$, cum $x = -\sqrt{+\sqrt{s}}$; posterior præbebit, tam $x = +\sqrt{-\sqrt{s}}$, quam $x = -\sqrt{-\sqrt{s}}$. Hinc quatuor radices æquationis $x^4 - s = 0$, erunt $+\sqrt{+\sqrt{s}}$, $-\sqrt{+\sqrt{s}}$, $+\sqrt{-\sqrt{s}}$, $-\sqrt{-\sqrt{s}}$: ex quibus, quemadmodum duæ postremæ sunt imaginariæ, ita priores duæ deprehenduntur reales, earumque una positiva, & altera negativa.

931. Similiter, si habeatur $x^4 + s = 0$, sive $x^4 = -s$; per unam quadratæ radicis extractionem, orientur duæ istæ æquationes secundi gradus $x^2 = +\sqrt{-s}$, & $x^2 = -\sqrt{-s}$. Unde, si rursus ex utraque istarum quadrata radix extrahatur; prior quidem exhibebit, tum $x = +\sqrt{+\sqrt{-s}}$, cum $x = -\sqrt{+\sqrt{-s}}$; posterior vero dabit, tam $x =$

$+\sqrt{-\sqrt{-s}}$, quam $x=-\sqrt{-\sqrt{-s}}$. Quare quatuor radices æquationis $x^4+s=0$ erunt $+\sqrt{+\sqrt{-s}}$, $-\sqrt{+\sqrt{-s}}$, $+\sqrt{-\sqrt{-s}}$, $-\sqrt{-\sqrt{-s}}$: quas omnes liquet imaginarias esse.

932. Ab affectione cubica immunes quoque sunt semper æquationes quarti gradus, in quibus, tum secundus, cum quartus terminus deficit; quæque, nulla habita signorum ratione, sub hac formula generali $x^4+qx^2+s=0$ possunt comprehendi. Sunt namque hujusmodi æquationes derivativæ secundi gradus; adeoque valores ipsarum inveniuntur, per duplicem quadratæ radicis extractionem: nec proinde ullam radicalem cubicam continebunt.

933. Quum enim sit $x^4+qx^2+s=0$; erit, transponendo, $x^4+qx^2=-s$; &, addendo ad utramque partem $q^2:4$, erit etiam $x^4+qx^2+q^2:4=q^2:4-s$. Hinc, extracta utrinque quadrata radice, fiet, tum $x^2+q:2=+\sqrt{(q^2:4-s)}$, cum $x^2+q:2=-\sqrt{(q^2:4-s)}$; hoc est, tam $x^2=-q:2+\sqrt{(q^2:4-s)}$, quam $x^2=-q:2-\sqrt{(q^2:4-s)}$. Quare, rursus per quadratæ radicis extractionem, prior quidem earum æquationum dabit, & $x=+\sqrt{[-q:2+\sqrt{(q^2:4-s)}]}$, & $x=-\sqrt{[-q:2+\sqrt{(q^2:4-s)}]}$; posterior vero præbebit, & $x=+\sqrt{[-q:2-\sqrt{(q^2:4-s)}]}$, & $x=-[\sqrt{-q:2-\sqrt{(q^2:4-s)}}]$.

934. Quatuor ergo radices æquationis $x^4+qx^2+s=0$ sunt $+\sqrt{[-q:2+\sqrt{(q^2:4-s)}]}$, $-\sqrt{[-q:2+\sqrt{(q^2:4-s)}]}$, $+\sqrt{[-q:2-\sqrt{(q^2:4-s)}]}$, $-\sqrt{[-q:2-\sqrt{(q^2:}}$

$4-s)]$, quarum unaquæque nullam radicalem cubicam continet. Quare nulli dubium esse potest, quin æquatio ipsa $x^4+qx^2+s=0$ ab omni prorsus affectione cubica sit immunis. Cujus autem speciei sint eæ radices, constabit nobis per ipsam æquationem secundi gradus, unde ea, de qua agitur, derivatur.

935. Nimirum, si fiat $x^2=y$, erit æquatio ista $y^2+qy+s=0$. Unde primo, si radices duæ æquationis $y^2+qy+s=0$ sint reales, & positivæ; erunt radices quatuor æquationis $x^4+qx^2+s=0$ similiter reales, sed duæ positivæ, & duæ negativæ. Secundo, si radices duæ æquationis $y^2+qy+s=0$ sint quidem reales, sed una positiva, altera negativa; ex radicibus quatuor æquationis $x^4+qx^2+s=0$ duæ erunt reales, & duæ imaginariæ; eritque ex realibus una positiva, altera negativa. Et denique, si radices duæ æquationis $y^2+qy+s=0$, vel sint negativæ, vel imaginariæ; erunt radices quatuor æquationis $x^4+qx^2+s=0$ omnes imaginariæ.

936. Neque vero difficile erit, veritatem horum omnium intelligere. Quum enim ex hypothesi habeatur $x^2=y$; erit, tum $x=+\sqrt{y}$, cum $x=-\sqrt{y}$. Quare, ubi in æquatione secundi gradus $y^2+qy+s=0$ comperti sunt valores duo incognitæ y; habebuntur in æquatione principali $x^4+qx^2+s=0$ valores quatuor incognitæ x, extrahendo radicem quadratam ex utroque valore incognitæ y. Unde omnino necesse est, ut valores incognitæ x tales oriantur, quales paulo ante * descripti fuere.

* art. 935.

937. Itaque eæ solæ æquationes quarti gradus possunt cubicam affectionem continere, in qui-

quibus adest, vel secundus terminus, vel quartus, vel etiam uterque. Quando autem id contingat; ipsa hujusmodi æquationes resolvendi ratio nobis ostendet: quæ etiam indicabit, num æquatio quarti gradus dividi possit in duas alias secundi gradus, nec ne. Cæterum, quia resolvuntur æquationes quarti gradus, alias ex iis derivando, quæ sint trium tantum dimensionum: proinde, qua id fiat ratione, primo quidem ostendendum nobis erit.

II. *Æquationum cubicarum ex æquationibus quarti gradus derivatio.*

938. QUamquam æquationes quarti gradus, quarum resolutio hic quæritur, in propria sua sede existant; nihil tamen vetat, quominus eas consideremus, velut ortas ex multiplicatione mutua duarum secundi gradus æquationum. Nam, si ex quatuor æquationibus simplicibus, quæ ipsarum continent radices, multiplicentur inter se, tum binæ duæ, cum aliæ binæ; producta fient æquationes duæ duarum dimensionum. Unde æquatio quarti gradus constituetur per multiplicationem mutuam, tam quatuor illarum æquationum simplicium, quam duarum istarum secundi gradus.

939. Verum quidem est, quod, sicuti quatuor illarum simplicium æquationum unaquæq; apparenter tantum est simplex, & propria ejus sedes in quarto gradu subsistit; sic etiam ex duabus iis æquationibus secundi gradus nulla sedem habet in illo gradu, sed quartum velut sedem suam pro-

priam quælibet agnoſcit. Interim, ſicuti id non obſtat, quominus æquatio quarti gradus orta concipiatur per mutuam multiplicationem quatuor æquationum ſimplicium; ita nec etiam impedimento eſſe debet, quominus eadem æquatio per multiplicationem mutuam duarum ſecundi gradus æquationum orta intelligatur.

940. Id quum ita ſit, en modo, qua ratione ex propoſita quarti gradus æquatione aliam cubicam derivare licebit. Aſſumantur indeterminate æquationes duæ ſecundi gradus, per quarum multiplicationem ea concipitur orta; eædemque multiplicentur inter ſe. Quia ergo nova iſta, quæ producitur, debet eſſe ejuſdem naturæ cum æquatione propoſita, poterunt termini unius ordine comparari cum terminis alterius. Unde, inſtituta hac comparatione, invenientur totidem æquationes, quot occurrunt qnantitates indeterminatæ. Et, ope iſtarum, nullo negotio æquationem cubicam quæſitam derivare fas erit.

941. Referat ergo $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ æquationem quarti gradus, quam ſecundo termino carentem aſſumimus, quum facile ſit *, ex qualibet æquatione ſecundum terminum delere. Sint autem $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$ æquationes duæ ſecundi gradus, per quarum multiplicationem ea intelligitur orta. Nec difficultatem facere debet, quod duas iſtas ſubinde accipimus, ut idem in utraque ſit coefficiens ſecundi termini, ſed contrariis ſignis affectus. Id namque efficere cogimur, ut etiam in æquatione, quæ oritur ex ipſarum multiplicatione, ſecundus terminus deſit.

* art. 578.

942.

942. Jam æquatio quarti gradus, quæ producitur, multiplicando $x^2 + yx + a = 0$ per $x^2 - yx + b = 0$, est $x^4 + (a + b - y^2) x^2 + (by - ay) x + ab = 0$. Quare, comparando terminos ejus ordine cum terminis propositæ æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$; habebuntur tres aliæ æquationes, quarum prima erit $a + b - y^2 = p$, secunda $by - ay = r$, & tertia $ab = s$. Plane vero, si ex tribus hisce æquationibus aliam eruamus, in qua non alia maneat quantitas indeterminata, quam y, quæ est coefficiens secundi termini in utraque æquationum secundi gradus; ea ad tres dimensiones ascendet.

943. Quum enim in prima earum æquationum habeatur $a + b - y^2 = q$; erit, transponendo, $a + b = q + y^2$; atque adeo, multiplicando per y, erit $ay + by = qy + y^3$. Jam vero habetur in secunda $by - ay = r$. Itaque erit, primo per additionem $2by = qy + y^3 + r$, & secundo per subtractionem $2ay = qy + y^3 - r$: proindeque, multiplicando simul duas istas æquationes, erit etiam $4aby^2 = q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2$. Est autem in ultima æquatione $ab = s$, sive $4aby^2 = 4sy^2$. Quare erit $4sy^2 = q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2$, sive $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$.

944. Sicuti autem in hac æquatione non alia occurrit quantitas indeterminata, quam y; ita perspicuum est, eam subinde ad sex dimensiones ascendere, ut tamen numeri dimensionum, quas in singulis terminis habet incognita, dividi possint per binarium. Quare poterit ea velut æquatio trium dimensionum haberi; ut revera

sit

fit tertii gradus, si ponatur $y^2 = z$. Nam, scribendo in æquatione z loco y^2, z^2 loco y^4, & z^3 loco y^6; mutabitur ea in hanc aliam $z^3 + 2qz^2 + (q^2 - 4s)z - r^2 = 0$, quæ ad tertium gradum ascendit.

945. Neque vero necesse est, ex æquatione quarti gradus delere secundum terminum, quo aliam cubicam exinde derivare liceat; sed obtineri hæc poterit, etiamsi illa terminis omnibus sit repleta. Interim, ad eam eruendam, arte aliqua opus est, ad quam vulgus Algebristarum sedulo non advertens, factum reor, ut dumtaxat casum expenderit, quum æquatio quarti gradus secundo termino caret. Omnis autem solertia, in assumendis æquationibus indeterminatis secundi gradus, versetur oportet. Nam danda est opera, ut coefficiens secundi termini iisdem quantitatibus in utraque sit expressus.

946. Referat ergo $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ æquationem quarti gradus, terminis omnibus repletam; sintque $y^2 + (p:2 + y)x + a = 0$, & $x^2 + (p:2 - y)x + b = 0$ æquationes duæ secundi gradus, per quarum multiplicationem ea intelligitur oriri. Quia igitur duæ istæ æquationes, multiplicatæ per se invicem, producunt æquationem $x^4 + px^3 + (a+b + p^2:4 - y^2)x^2 + (ap:2 + bp:2 + by - ay)x + ab = 0$; instituta comparatione, habebuntur rursus tres æquationes, quarum prior erit $a + b + p^2:4 - y^2 = q$, secunda $ap:2 + bp:2 + by - ay = r$, & tertia $ab = s$.

947. Jam, quærendo, ope harum, æquationem aliam, in qua maneat sola indeterminata y; etiam tertii gradus ea orietur. Nam, quum pri-

prima æquatio præbeat $a + b = q - p^2 : 4 + y^2$; erit, tum $ap : 2 + bp : 2 = pq : 2 - p^3 : 8 + py^2 : 2$, cum $ay + by = qy - p^2y : 4 + y^3$. Unde, quum secunda æquatio, substitutionis ope, præbeat $by - ay = r - pq : 2 + p^3 : 8 - py^2 : 2$; erit primo per additionem $2by = qy - p^2y : 4 + y^3 + r - pq : 2 + p^3 : 8 - py^2 : 2$, & secundo per subtractionem $2ay = qy - p^2y : 4 + y^3 - r + pq : 2 - p^3 : 8 + py^2 : 2$: proindeque, multiplicando simul duas istas æquationes, erit etiam $4aby^2 = q^2y^2 - p^2qy^2 + 3p^4y^2 : 16 + 2qy^4 - 3p^2y^4 : 4 + y^6 - r^2 + pqr - p^2q^2 : 4 - p^3r : 4 + p^4q : 8 - p^6 : 64 + pry^2$.

948. Hinc, scribendo in æquatione ista loco ab valor ejus s, quam præbet ultima æquatio; mutabitur ea in hanc aliam $4sy^2 = q^2y^2 - p^2qy^2 + 3p^4y^2 : 16 + 2qy^4 - 3p^2y^4 : 4 + y^6 - r^2 + pqr - p^2q^2 : 4 - p^3r : 4 + p^4q : 8 - p^6 : 64 + pry^2$, quæ, juxta regulas artis ordinata, evadet $y^6 + (2q - 3p^2 : 4)y^4 + (q^2 - p^2q + 3p^4 : 16 + pr - 4s)y^2 - (r^2 + pqr - p^2q^2 : 4 - p^3r : 4 + p^4q : 8 - p^6 : 64) = 0$. Hæc autem, sicuti solam indeterminatam y comprehendit, ita ad sex dimensiones adeo quidem assurgit, ut tamen velut derivativa tertii gradus debeat haberi.

949. Vides igitur, quod, etsi æquatio quarti gradus terminis omnibus sit repleta, adhuc tamen ex ea derivare licebit æquationem aliam cubicam. Sub ista autem, quam modo comperuimus, comprehendi eam, in quam paulo superius * incidimus, quum æquatio quarti gradus secundo termino carebat; liquet abunde. Nam in hypothesi, quod sit $p = 0$, eadem evadit $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$. Neque

* art. 843.

que ſane aliter eſſe debet ; quandoquidem, exiſtente $p = 0$, æquationes duæ ſecundi gradus $x^2 + (p : 2 + y)x + a = 0$, & $x^2 + (p : 2 - y)x + b = 0$ fiunt $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$.

III. *Reſolutio æquationum quarti gradus per cubicas, ex iis derivatas.*

950. Vidimus, quo artificio ex æquationibus quarti gradus aliæ deriventur, quæ ſint trium tantum dimenſionum. Videamus modo, qua ratione, iſtis mediantibus, poſſit, & illarum reſolutio obtineri, & earundem natura cognita fieri. Quem in finem ſupponamus rurſus primo, æquationem quarti gradus ſecundo termino carere, eamque eſſe $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Jamque, ſi eadem orta intelligatur ex multiplicatione mutua duarum iſtarum ſecundi gradus æquationum $x^2 + yx + a = 0$, & $x^2 - yx + b = 0$; habebitur, non modo æquatio cubica $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$, verum etiam, & $2ay = qy + y^3 - r$, & $2by = qy + y^3 + r$.

951. Quum autem poſtremæ iſtæ duæ æquationes præbeant $a = (qy + y^3 - r) : 2y$, & $b = (qy + y^3 + r) : 2y$; ſubſtitutionis ope, duæ illæ æquationes ſecundi gradus evadent $x^2 + yx + (qy + y^3 - r) : 2y = 0$, & $x^2 - yx + (qy + y^3 + r) : 2y = 0$: proindeque, quia in iis non alia manet indeterminata, quam y, liquet, ad eas determinandas, non aliud fieri debere, quam ipſius y valorem invenire. Quum ergo valor iſte habeatur, mediante cubica æquatio-

tione $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$; jam liquido patet, cubicam istam æquationem præbere nobis resolutionem propositæ æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$.

952. Invento namque valore indeterminatæ y, per ejus substitutionem, jam determinatæ manent æquationes duæ secundi gradus $x^2 + yx + (qy + y^3 - r) : 2y = 0$, & $x^2 - yx + (qy + y^3 + r) : 2y = 0$. Unde, quum ex hypothesi æquatio, de qua agitur, $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ oriatur ex mutua earum multiplicatione; omnino necesse est, ut radices quatuor ipsius æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ sint illæ eædem, quæ in duabus illis continentur: proindeque, resolutione istarum secundi gradus æquationum, quæsitas quatuor radices habere licebit.

953. Supponamus modo, æquationem quarti gradus esse terminis omnibus repletam, adeoque exhiberi per $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Jamque, si eadem orta concipiatur ex multiplicatione mutua duarum secundi gradus æquationum $x^2 + (p : 2 + y)x + a = 0$, & $x^2 + (p : 2 - y)x + b = 0$; habebitur, non modo æquatio cubica $y^6 + (2q - 3p^2 : 4)y^4 + (q^2 - p^2q + 3p^4 : 16 + pr - 4s)y^2 - (r^2 + pqr - p^2q^2 : 4 - p^3r : 4 + p^4q : 8 - p^6 : 64) = 0$, verum etiam, & $2ay = qy - p^2y : 4 + y^3 - r + pq : 2 - p^3 : 8 + py^2 : 2$, & $2by = qy - p^2y : 4 + y^3 + r - pq : 2 + p^3 : 8 - py^2 : 2$.

954. Plane vero postremæ istæ duæ æquationes præbent $a = (qy - p^2y : 4 + y^3 - r + pq : 2 - p^3 : 8 + py^2 : 2) : 2y$, & $b = (qy - p^2y : 4 + y^3 + r - pq : 2 + p^3 : 8 - py^2 : 2) :$

2y:

$2y$. Quare, ſubſtitutionis ope, duæ illæ æquationes ſecundi gradus $x^2 + (p:2+y)x + a = 0$, & $x^2 + (p:2-y)x + b = 0$ evadent $x^2 + (p:2+y)x + (qy - p^2y:4 + y^3 - r + pq:2 - p^3:8 + py^2:2):2y = 0$, & $x^2 + (p:2-y)x + qy - p^2y:4 + y^3 + r - pq:2 + p^3:8 - py^2:2):2y = 0$; nec aliam indeterminatam, quam y, continebunt.

955. Hinc, ſi, beneficio cubicæ æquationis $y^6 + (2q - 3p^2:4)y^4 + (q^2 - p^2q + 3p^4:16 + pr - 4s)y^2 - (r^2 + pqr - p^2q^2:4 - p^3r:4 + p^4q:8 - p^6:64) = 0$, ipſius y valor inveniatur, idemque ſubſtituatur in duabus iis æquationibus, eædem determinatæ prorſus evadent. Quare, quum ex hypotheſi per ipſarum multiplicationem oriatur æquatio quarti gradus $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$; neceſſe eſt, ut radices iſtius ſint illæ eædem, quæ in iis continentur: & ea propter, reſolutione earum ſecundi gradus æquationum, quæſitas quatuor radices obtinere licebit.

956. Quoniam autem, æquationes quarti gradus, in propria ſua ſede exiſtentes, in duas claſſes diſtribuimus; & alias diximus tales eſſe, ut contineant affectionem cubicam; alias ejuſcemodi, ut a cubica affectione ſint prorſus immunes: videamus modo, qua ratione unæ ab aliis diſtingui poſſint, etiam non cognitis earum radicibus. Id ergo, ut jam ſuperius * innuimus, conſtabit nobis, per ipſas cubicas æquationes, quæ ex æquationibus quarti gradus derivantur.

* art. 937.

957. Nimirum, ſi contingat, æquationes cubicas, exinde derivatas, in propria ſua ſede exiſtere, ita, ut radices ipſarum radicalibus cubi-

bicis exprimi debeant; tunc æquationes quarti gradus continebunt affectionem cubicam, earumque radices radicales quoque cubicas comprehendent. Quod si vero æquationes illæ cubicæ non existant in propria sua sede, sed valorem habeant rationalem; eo casu æquationes quarti gradus immunes erunt ab affectione cubica; earundemque radices nonnisi radicales quadratas comprehendent.

958. Innotescit ergo nobis natura æquationum quarti gradus, in propria sua sede existentium, beneficio æquationum cubicarum, quæ ex iis derivantur. Sed, mediantibus iisdem æquationibus cubicis, cognosci quoque potest, num æquationes quarti gradus existant in propria sua sede, an vero in duas secundi gradus sint divisibiles: adeo, ut, si casum excipias, quum æquationes quarti gradus unam continent radicem rationalem; poterit earum natura perspecta fieri, ac explorata, per solas æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis.

959. Quotiescumq; enim æquationes illæ cubicæ existunt in propria sua sede; tunc etiam in propria sua sede erunt æquationes quarti gradus: quibus hoc amplius accedet, quod affectionem cubicam continebunt. Sed, si æquationes cubicæ non sint in sede sua propria, verum valorem habeant rationalem; tunc rursus, vel valor iste talis est, ut elici exinde nequeat quadrata radix: & isto casu æquationes quarti gradus existent quidem in propria sua sede, sed immunes erunt ab affectione cubica; vel est ejusmodi, ut exinde quadrata radix elici possit; & quum hoc contingit, æquationes quarti gra-

dus

dus non erunt in propria sua sede, sed in duas alias secundi gradus dividi poterunt.

960. Neque vero difficile erit, horum omnium veritatem ostendere. Jam enim, quæ mutua multiplicatione producunt æquationem quarti gradus, sunt $x^2+yx+(qy+y^3-r):2y=0$, $x^2-yx+(qy+y^3+r):2y=0$, quum ea est $x^4+qx^2+rx+s=0$; & $x^2+(p:2+y)x+(qy+y^3-r+pq:2+py^2:2):2y=0$, $x^2+(p:2-y)x+(qy+y^3+r-pq:2-py^2:2)=0$, quum eadem est $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Quare, sicuti æquationes illæ componentes apparenter tantum sunt secundi gradus, quum valor incognitæ y continet radicales, sive quadratas, sive cubicas; ita sedes earum revera erit in secundo gradu, quum idem valor incognitæ y est rationalis, nec ullas radicales comprehendit.

961. Unde obiter notetur hic velim, quam bene analysis omnes rei, de qua agitur, casus nobis ostendat, & qua ratione una, eademque via singulis satisfaciat. Quotiescumque enim æquatio quarti gradus nullam habet radicem rationalem, tria contingere possunt; primo, ut sit divisibilis in duas secundi gradus; secundo, ut existat in sede sua propria, sed immunis sit ab affectione cubica; & denique, ut reperiatur quidem in propria sua sede, sed affectionem cubicam contineat. Pro singulis casibus suppeditat nobis analysis cubicam æquationem, in qua tria quoque circa ejus valorem contingere poterunt; primo, ut sit rationalis; secundo, ut sit expressus per radicalem quadratam; & denique, ut radicales cubicas comprehendat.

IV.

IV. *Quæ æquationes quarti gradus resolvi possint, demonstratur.*

962. Quemadmodum non omnes æquationes cubicæ resolvi possunt, sed eæ dumtaxat, quæ unicam habent radicem realem; ita nec omnium æquationum quarti gradus resolutio potest obtineri, sed earum tantummodo, ex quibus tales derivantur æquationes cubicæ, quæ sunt capaces resolutionis. Ut enim ostensum est, obtinetur resolutio æquationum quarti gradus, resolvendo æquationes cubicas, quæ derivantur ex iis. Quocirca, si contingat, cubicas istas æquationes resolvi non posse, quia forte omnes habent radices reales; tunc nec ipsa æquationum quarti gradus resolutio poterit obtineri.

963. Hinc illud nobis ostendendum est, quænam inter æquationes quarti gradus ejusmodi sunt, ut cubicæ æquationes, quæ ex iis derivantur, omnes habeant radices reales. Qua in re notare prius oportet, quod, quum radices imaginariæ in æquationibus occurrant semper in numero pari, æquationes quarti gradus, pro qualitate radicum, trium tantum specierum esse possunt. Vel enim habent omnes radices reales; vel duas reales, & duas imaginarias admittunt; vel denique omnes ipsarum radices sunt imaginariæ. Itaque, ut notum nobis evadat, ex quibusnam æquationibus quarti gradus tales derivantur æquationes cubicæ, quæ omnes radices reales habeant; singulos hos casus, oportet, prosequamur.

964. Ne autem calculi labor tædio nos afficiat, repræsentabimus æquationes omnes quarti gradus per formulam istam generalem $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, in qua secundus terminus deest. Etsi enim, pro earum ad hanc formulam reductione, opus sit, quandoque delere ex iis secundum terminum; id tamen veritati eorum, quæ a nobis ostendenda sunt, nihil officiet. Nam, tollendo secundum terminum ex æquatione aliqua, radices ejus dumtaxat augentur, vel minuuntur data quadam quantitate, proindeque ex negativis positivæ, vel vicissim, fieri possunt; sed ex realibus imaginariæ, vel e contra, fieri non possunt.

965. Habeat itaque primum æquatio quarti gradus $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ omnes radices reales; sintque $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - c = 0$, $x + a + c = 0$ æquationes quatuor simplices, quæ continent radices illas. Quia ergo, harum continua multiplicatione, producitur $x^4 - (2a^2 - b^2 - c^2) x^2 - (2ab^2 + 2ac^2) x + (a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$; fiet $q = - 2a^2 - b^2 - c^2$, $r = 2ac^2 - 2ab^2$, & $s = a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2$. Hinc, substitutis valoribus istis in æquatione cubica $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s) y^2 - r^2 = 0$, loco ejus habebitur hæc alia $y^6 - (4a^2 - 2b^2 - 2c^2) y^4 + (8a^2b^2 + 8a^2c^2 - 2b^2c^2 + b^4 + c^4) y^2 - (4a^2c^4 + 8a^2b^2c^2 - 4a^2b^4) = 0$, cujus omnes radices sunt reales; quum evanescant ejus termini omnes, sive loco y^2 ponatur $4a^2$, sive $b^2 + 2bc + c^2$, sive demum $b^2 - 2bc + c^2$,

966. Habeat secundo æquatio quarti gradus

dus $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ duas radices reales, & alias imaginarias, sintque $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$, $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes simplices, quæ eas continent radices. Et quoniam, continua harum multiplicatione, producitur æquatio $x^4 - (2a^2 - b^2 + c^2)x^2 - (2ab^2 - 2ac^2)x + (a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2) = 0$; instituta comparatione, fiet $q = c^2 - b^2 - 2a^2$, $r = -2ab^2 - 2ac^2$, & $s = a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$. Unde, subrogatis valoribus hisce in cubica æquatione $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$; orietur loco ejus hæc alia $y^6 - (4a^2 - 2b^2 + 2c^2)y^4 + (8a^2b^2 - 8a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4)y^2 - (4a^2c^4 - 8a^2b^2c^2 - 4a^2b^4) = 0$, cujus una radix erit realis, & aliæ duæ imaginariæ; quandoquidem evanescunt ejus termini omnes, ponendo loco y^2, non modo $4a^2$, verum etiam, & $b^2 - c^2 + 2bc\sqrt{-1}$, & $b^2 - c^2 - 2bc\sqrt{-1}$.

667. Habeat demum æquatio quarti gradus $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ omnes radices imaginarias; sintque $x - a - \sqrt{-b^2} = 0$, $x - a + \sqrt{-b^2} = 0$, $x + a - \sqrt{-c^2} = 0$, $x + a + \sqrt{-c^2} = 0$ æquationes simplices, quæ illiusmodi continent radices. Per continuam ergo harum multiplicationem, orietur æquatio $x^4 - (2a^2 + b^2 + c^2)x^2 + (2ab^2 - 2ac^2)x + (a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0$. Quare, comparatione instituta, fiet $q = c^2 + b^2 - 2a^2$, $r = 2ab^2 - 2ac^2$, & $s = a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$; & consequenter æquatio cubica $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$, substitutionis ope, vertetur in hanc aliam $y^6 - (4a^2$

 $+ 2b^2$

$+ 2b^2 + 2c^2)y^4 - (8a^2b^2 - 8a^2c^2 - 2b^2c^2 + b^4 + c^4)y^2 - (4a^2c^4 + 8a^2b^2c^2 - 4a^2b^4) = 0$, cujus omnes radices ſunt reales; quum evaneſcant omnes ejus termini, ſcribendo loco y^2, ſive $4a^2$, ſive $-b^2 - 2bc - c^2$, ſive demum $-b^2 + 2bc - c^2$.

968. Hæc quum ita ſint, liquet modo, eas tantum æquationes quarti gradus reſolvi poſſe, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Nam, quotieſcumque, vel omnes radices ſunt reales, vel omnes imaginariæ, derivantur ex iis tales æquationes cubicæ, ut omnes ipſarum radices ſint reales; proindeque, ſicuti iſtæ reſolvi non poſſunt, ita nec illarum reſolutio poterit haberi. Qua vero ratione æquationes quarti gradus, in quibus radices omnes ſunt reales, diſtingui poſſint ab iis, quæ omnes habent radices imaginarias, ſupervacaneum eſt, hoc loco adjicere; quandoquidem per ea, quæ ſuperius dicta ſunt, non modo, ſi adſint radices imaginariæ, ſed quot reperiantur in unaquaque æquatione, facili quidem negotio perquirere licebit.

969. Illud potius hoc loco ſedulo notandum exiſtimo, quod ubi dicimus, eas tantum æquationes quarti gradus reſolvi poſſe, quæ duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; id intelligendum eſt de iis æquationibus, quæ affectionem cubicam continent. Nam profecto æquationes quarti gradus, quæ a cubica affectione ſunt prorſus immunes, ſemper reſolvi poſſunt, cujuſcumque ſpeciei ſint radices ipſarum. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Enimvero æquationes cubicæ, quæ ex iſtiuſmodi

quar-

quarti gradus æquationibus derivantur, nunquam existunt in propria sua sede; adeoque, sicuti eæ sunt semper capaces solutionis, ita & ipsæ quarti gradus æquationes semper solutionem admittent.

970. Notatu etiam hoc loco dignum judico, quod fieri quandoque potest, ut æquatio cubica, ex alia quarti gradus æquatione derivata, nullum habeat valorem rationalem, & tamen ut ipsa quarti gradus æquatio deprimi possit. Esto enim æquatio tertii gradus $x^3 + 3x^2 - 9x - 23 = 0$, quæ existit in sede sua propria, eaque multiplicetur per æquationem simplicem $x - 3 = 0$, ut alia quarti gradus oriatur $x^4 - 18x^2 + 4x + 69 = 0$. Quum igitur, comparata æquatione ista cum formula generali $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, fiat $q = -18$, $r = 4$, & $s = 69$; per substitutionem horum valorum, æquatio cubica generalis $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$ vertetur in hanc aliam $y^6 - 36y^4 - 48y^2 - 16 = 0$, quæ quidem nullum valorem rationalem admittit.

971. Et sane fieri nulla ratione potest, ut in isto casu æquatio cubica valorem admittat rationalem. Id enim si contingeret, æquatio quarti gradus; vel esset in propria sua sede, sed immunis ab affectione cubica; vel etiam in duas secundi gradus divisibilis esset: quorum utrumque repugnat; quum ex hypothesi componatur ex æquatione simplici, & alia cubica, in propria sua sede existente. Et deinde, etsi ex eo, quod æquatio cubica, exinde derivata, nullum habet valorem rationalem, non recte deducatur, existere illam in propria sua sede; optime tamen infer-

tur, affectionem cubicam continere, quandoquidem tres ex ejus radicibus non aliter, quam per latera cuborum, designare licebit.

V. *Resolutio æquationum quarti gradus alia methodo instituta.*

972. METHODUS, hactenus usurpata, pro resolvendis æquationibus quarti gradus, huc sane redit, ut æquatio, de qua agitur, intelligatur orta ex mutua multiplicatione duarum secundi gradus æquationum; ut duæ istæ æquationes generaliter, ac indefinite capiantur; & ut ea, quæ ipsarum oritur multiplicatione, conferatur cum æquatione proposita. Sed earundem æquationum resolutio obtineri etiam potest, capiendo indeterminate quatuor radices ipsarum, & constituendo novam æquationem, per multiplicationem mutuam æquationum simplicium, quæ eas continent radices.

973. Ut id ostendamus, referat rursus $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ æquationem resolvendam, quam secundo termino carentem assumimus, ad vitandam calculi prolixitatem. Referat quoque a summam duarum quarumvis ex quatuor ejus radicibus, itemque b differentiam earundem. Fiet ergo $(a + b) : 2$ radix una, & $(a - b) : 2$ radix altera. Quumque, ob defectum secundi
art. 447. termini, summa radicum omnium evanescere debeat: plane necesse est, ut sit $-a$ summa ex aliis duabus radicibus. Quare, si differentia istarum vocetur c; erit $(-a + c) : 2$ radix tertia, & $(-a - c) : 2$ radix quarta.

974. Hinc quatuor æquationes simplices,

quæ

quæ eas continent radices, erunt $x-(a-b):2=0$, $x-(a+b):2=0$, $x+(a-c):2=0$, & $x+(a+c):2=0$. Et quoniam productum ex primis duabus est $x^2-ax+(a^2-b^2):4=0$, & productum duarum aliarum est $x^2+ax+(a^2-c^2):4=0$; erit $x^4-(2a^2-b^2-c^2)x^2:4-(ab^2+ac^2)x:4+(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2):16=0$ æquatio quarti gradus, quæ earum multiplicatione producitur. Quare, comparatis terminis ejus cum terminis propositæ æquationis $x^4+qx^2+rx+s=0$, fiet $q=(-2a^2-b^2-c^2):4$, $r=(ac^2-ab^2):4$, & $s=(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2):16$.

975. Quum ergo in prima istarum æquationum habeatur $q=(-2a^2-b^2-c^2):4$, sive $4q=-2a^2-b^2-c^2$; erit, transponendo, $4q+2a^2=-b^2-c^2$; &, multiplicando per a, $4qa+2a^3=-ab^2-ac^2$. Est autem in secunda æquatione $r=(ac^2-ab^2):4$, sive $4r=ac^2-ab^2$. Quare erit, primo per additionem $4qa+2a^3+4r=-2ab^2$, & secundo per subtractionem $4qa+2a^3-4r=-2ac^2$: proindeque, divisis utriusque æquationis terminis omnibus per $2a$, prior fiet $2q+a^2+2r:a=-b^2$, & posterior $2q+a^2-2r:a=-c^2$.

976. Quoniam ergo habetur $2q+a^2+2r:a=-b^2$; erit etiam $2q+2a^2+2r:a=a^2-b^2$. Et similiter, quum sit $2q+a^2-2r:a=-c^2$; erit quoque $2q+2a^2-2r:a=a^2-c^2$. Hinc, multiplicatis per se mutuo duabus hisce æquationibus, habebitur ulterius $4q^2+8qa^2+4a^4-4r^2:a^2=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$. Est autem in ultima æquatione $(a^4$

 $-a^2b^2$

$-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2):16=s$, sive $a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2=16s$. Quare, per substitutionem, erit demum $4q^2+8qa^2+4a^4+4r^2:a^2=16s$, hoc est $a^6+2qa^4+(q^2-4s)a^2-r^2=0$.

977. Jam hæc æquatio, ficuti non aliam indeterminatam quantitatem continet, quam a; ita ad sex dimensiones subinde quidem attollitur, ut tamen pro derivativa tertii gradus debeat haberi. Unde, ope ejus, facile erit, ipsam quantitatem a determinare. Ea autem determinata, aliæ duæ b, & c nullo negotio determinabuntur.

*art. 975. Jam enim erat superius * $2q+a^2+2r:a=-b^2$, sive $b^2=-2q-a^2-2r:a$, & $2q+a^2-2r:a=-c^2$, sive $c^2=-2q-a^2+2r:a$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, fiet $b=\surd(-2q-a^2-2r:a)$, & $c=\surd(-2q-a^2+2r:a)$.

978. Hinc, ficuti æquationes simplices, quæ continent quatuor radices æquationis x^4

*art. 974. $+qx^2+rx+s=0$, erant * $x-(a-b):2=0$, $x-(a+b):2=0$, $x+(a-c):2=0$, $x+(a+c):2=0$; ita, substitutis loco b, & c valoribus suis, eædem fient $x-a:2-\surd(-q:2-a^2:4-r:2a)=0$, $x-a:2+\surd(-q:2-a^2:4-r:2a)=0$, $x+a:2-\surd(-q:2-a^2:4+r:2a)=0$, $x+a:2+\surd(-q:2-a^2:4+r:2a)=0$. Unde, ad eas penitus determinandas, non aliud superest, quam, ut loco a subrogetur valor ejus, quam præbet æquatio cubica $a^6+2qa^4+(q^2-4s)a^2-r^2=0$.

979. Ex eo autem, quod valor ipsius a erui debet ex æquatione cubica $a^6+2qa^4+(q^2-$

$4s)$

$4s) a^2 - r^2 = 0$, in qua dimensiones ejusdem a sunt duplicatæ; liquet, valorem illum triplicis speciei prodire posse, vel nempe rationalem, vel quadrata aliqua radicali expressum, vel denique designatum per latera cuborum. Unde rursus æquatio quarti gradus, de qua agitur, $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$; vel divisibilis erit in duas alias secundi gradus; vel existet in propria sede, sed immunis erit a cubica affectione; vel denique erit quidem in sede sua propria, sed affectionem cubicam continebit.

980. Quæ quum ita sint, perspicuum est, hanc aliam æquationes quati gradus resolvendi methodum illa eadem nobis præbere, quæ per priorem methodum obtinentur. Nec sane aliter esse debet. Jam enim vidimus superius *, æquationem $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ considerari posse, velut ortam ex mutua multiplicatione duarum istarum secundi gradus æquationum $x^2 + yx + (qy + y^3 - r) : 2y = 0$, $x^2 - yx + (qy + y^3 + r) : 2y = 0$, in quibus valor ipsius y determinari debet per cubicam istam æquationem $y^6 + 2qy + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$. Plane vero, sicuti cubica isthæc æquatio coincidit cum alia $a^6 + 2qa^4 + (q^2 - 4s) a^2 - r^2 = 0$; ita duæ illæ secundi gradus æquationes resolutæ easdem æquationes simplices nobis exhibebunt.

* art. 951.

981. Quum enim sit $x^2 + yx + (qy + y^3 - r) : 2y = 0$; erit etiam $x^2 + yx = -q : 2 - y^2 : 2 + r : 2y$. Quare, addendo ad utramque æquationis partem $y^2 : 4$, & extrahendo hinc inde quadratam radicem; fiet, tum $x + y : 2 = +\sqrt{(-q : 2 - y^2 : 4 + r : 2y)}$, cum $x + y : 2$

$= -$

$= - \surd(-q:2 - y^2:4 + r:2y)$; hoc est, & $x + y:2 - \surd(-q:2 - y^2:4 + r:2y) = 0$, & $x + y:2 + \surd(-q:2 - y^2:4 + r:2y) = 0$. Pariterque, quum habeatur $x^2 - yx + (qy + y^3 + r):2y = 0$; erit quoque $x^2 - yx = -q:2 - y^2:2 - r:2y$. Unde, addito utrinque $y^2:4$, & extracta quadrata radice; habebitur, tam $x - y:2 = + \surd(-q:2 - y^2:4 - r:2y)$, quam $x - y:2 = - \surd(-q:2 - y^2:4 - r:2y)$: proindeque erit, & $x - y:2 - \surd(-q:2 - y^2:4 - r:2y) = 0$, & $x - y:2 + \surd(-q:2 - y^2:4 - r:2y) = 0$.

982. Et sane utraque methodus pro una eademque haberi debet. Perinde enim est, sive assumantur indeterminate æquationes simplices, quæ contineant radices quatuor æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, sive capiantur indefinite æquationes secundi gradus, quæ easdem radices, binatim per se mutuo multiplicatas, comprehendant. Visum est autem, priore methodo explicata, hanc aliam subjungere. Nam experientia novimus, nonnullis difficultatem facere, quod æquatio quarti gradus, in propria sua sede existens, considerari potest, velut orta ex mutua multiplicatione aliarum duarum, quæ secundi sint gradus.

983. Cæterum, si eadem hac methodo tentanda sit resolutio æquationis $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, quæ terminis omnibus est repleta; in assumendis indeterminate quatuor radicibus ejus, arte aliqua opus erit. Nimirum, supponendum est, esse $a - p:2$ summam duarum radicum, & $-a - p:2$ summam ex aliis duabus:

bus: adeo nempe, ut referente b differentiam illarum, itemque c differentiam istarum, fiat earum radicum prima $a:2-p:4+b:2$, secunda $a:2-p:4-b:2$, tertia $-a:2-p:4+c:2$, & quarta $-a:2-p:4-c:2$. Qua ratione æquationes simplices, easdem radices exhibentes, erunt $x+p:4-a:2-b:2=0$, $x+p:4-a:2+b:2=0$, $x+p:4+a:2-c:2=0$, & $x+p:4+a:2+c:2=0$.

VI. *Alia æquationes cubicas derivandi ratio pro reductione æquationum quarti gradus.*

984. PEr cubicas æquationes, quæ ex aliis quarti gradus derivantur, vidimus, non modo istarum resolutionem obtineri, quum existunt in propria sua sede, verum etiam dividi easdem in alias duas secundi gradus, quum, natura sua, sunt subinde divisibiles. Jam cubicas æquationes, quę postremo huic peragendo inserviant, paulo aliter reperire docuit Vir Clarissimus Hyacinthus Christophorus, cui, si quid ego in hisce studiis profecerim, id omne libenter acceptum refero. Et quamquam methodum suam ipsemet in lucem ediderit in Epistola directa ad doctissimum Virum Nicolaum Galitia, in Regio nostro Lycæo Eximium olim Canonum Professorem, gratissima memoria non uno nomine mihi semper recolendum; ne tamen aliquid omittam, quod scitu sit dignum, visum est, ejus artificium hic breviter aperire.

985. Nimirum, si utraque pars æquationis quarti gradus quadratum esset perfectum; jam li-

liceret, per extractionem quadratæ radicis, æquationem illam ad aliam ſecundi gradus deprimere. Itaque, quum æquatio aliqua quarti gradus, natura ſua, deprimi poteſt, nec tamen ejus utraque pars quadratum perfectum deprehenditur; in id incumbendum, ut aliquid ad utramque partem adjiciatur, quo utraque perfectum quadratum evadat. Sit ergo $x^4 = qx^2 + rx + s$ æquatio quarti gradus, natura ſua diviſibilis in alias duas ſecundi gradus. Apponenda eſt itaque ad utramque partem quantitas aliqua, quæ utramque reddat quadratum perfectum. Et jam, ſi fuerit $x^2 + y$ radix quadrata partis prioris; erit $2yx^2 + y^2$ id, quod utrique parti debet apponi. Unde eo res redit, ut inveſtigemus, qua ratione determinari debeat quantitas y.

986. Hunc in finem conſideremus hanc quadrati proprietatem, nulli non cognitam: nimirum, quod, ſi fiat quadratum ex radice binomia, illud conſtabit ex tribus terminis, eritque id, quod ex extremorum multiplicatione producitur, æquale quadrato, quod fit ex termino medio dimidiato. Ita quadratum ex $a + b$ eſt $a^2 + 2ab + b^2$; & id quod oritur, multiplicando a^2 per b^2, eſt æquale quadrato, quod fit ex ſemiſſe termini medii $2ab$. Quum igitur, addendo ad utramque partem aſſumptæ æquationis $2yx^2 + y^2$, fiat $x^4 + 2yx^2 + y^2 = (q + 2y)x^2 + rx + (s + y^2)$, & in hac utraque pars eſſe debeat quadratum perfectum; erit $(q + 2y)x^2 . (s + y^2) = r^2x^2 : 4$: proindeque erit $y^3 + qy^2 : 2 + sy + qs : 2 - r^2 : 8 = 0$ æquatio, per quam determinari debet quantitas y.

987. Jam, quum æquatio quarti gradus x^4

$= qx^2$

$= qx^2 + rx + s$, natura sua, in alias duas secun- gradus est divisibilis; habebit quantitas y in inventa æquatione cubica $y^3 + qy^2 : 2 + sy + qs : 2 - r^2 : 8 = 0$ talem valorem rationalem, ut, si ope ejus determinetur quantitas $2yx^2 + y^2$, ad utramque partem æquationis addenda, poterit ista, per extractionem quadratæ radicis, semper ad aliam secundi gradus deprimi. Unde, quum quæstio est de dividenda æquatione aliqua quarti gradus in alias duas, quæ ad secundum gradum ascendant, non aliud fieri debet, quam inquirere, num cubica æquatio, quæ exinde derivatur, præbeat pro y talem valorem rationalem, ut addendo hinc inde $2yx^2 + y^2$, utraque pars quadratum perfectum evadat.

988. Neque enim satis est, ut quantitas y habeat in æquatione cubica $y^3 + qy^2 : 2 + sy + qs : 2 - r^2 : 8 = 0$ valorem rationalem. Nam fieri potest, ut pars posterior æquationis $x^4 = qx^2 + rx + s$ per additionem ipsius $2yx^2 + y^2$ perfectum quadratum non evadat. Nec obscura est hujus rei ratio. Proprietas namque illa quadrati, ope cujus inventa est æquatio cubica $y^3 + qy^2 : 2 + sy + qs : 2 - r^2 : 8 = 0$, non est subinde quadrato essentialis, ut alteri etiam quantitati trinomiæ, quæ non sit quadratum, minime competat. Plane enim quantitas trinomia $a^3 : b + 2ab + b^3 : a$ non est quadratum; & tamen productum ex terminis extremis $a^3 : b$, & $b^3 : a$ adhuc æquale est quadrato termini medii dimidiati.

989. Sit igitur æquatio quarti gradus $x^4 = 8x^2 - 4x - 3$; & oporteat, juxta hanc methodum, inquirere, num ea in duas alias secun-

cundi gradus sit divisibilis. Quoniam relate ad propositam æquationem fit $q = 8$, $r = -4$, & $s = -3$; substitutis hisce valoribus, æquatio cubica $y^3 + qy^2 : 2 + sy + qs : 2 - r^2 : 8 = 0$ vertetur in hanc aliam $y^3 + 4y^2 - 3y - 14 = 0$. Unde, quia in ista æquatione y idem valet, ac -2; fiet $2yx^2 + y^2 = -4x^2 + 4$: proindeque, per additionem hujus quantitatis, æquatio proposita evadet $x^4 - 4x^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1$. Quumque istius æquationis utraque pars sit quadratum perfectum, &, per extractionem quadratæ radicis, fiat $x^2 - 2 = 2x - 1$; concludendum est, propositam æquationem divisibilem esse, & esse $x^2 - 2x - 1 = 0$ unam ex æquationibus componentibus.

990. Jam, inventa una æquatione componente, haberi poterit, per divisionem, æquatio altera; nimirum, dividendo æquationem propositam $x^4 = 8x^2 - 4x - 3$, sive $x^4 - 8x^2 + 4x + 3 = 0$ per eam, quæ jam inventa est, $x^2 - 2x - 1 = 0$. Nam, sicuti divisio fieri debet exacte, ita quotiens talis divisionis præbebit æquationem alteram componentem. Et profecto, instituta divisione, fiet $x^2 + 2x - 3 = 0$ æquatio altera. Interim, per extractionem quadratæ radicis, licebit, utramque simul eruere. Ubi enim ex æquatione $x^4 - 4x^2 + 4 = 4x^2 - 4x + 1$ quadrata radix extrahitur; habetur, tum $x^2 - 2 = 2x - 1$, cum $x^2 - 2 = -2x + 1$. Plane vero, sicuti harum æquationum prior dat $x^2 - 2x - 1 = 0$; ita posterior præbet $x^2 + 2x - 3 = 0$.

991. Cæterum hæc eadem methodus usui nobis esse potest, etiam quum æquatio quarti gra-

gradus terminis omnibus est repleta: nimirum, si terminus secundus jungatur cum primo, & in determinanda quantitate, quæ ad utramque æquationis partem addi debet, ut utraque quadratum evadat, ejus quoque ratio habeatur. Referat enim $x^4 \mp px^3 = qx^2 + rx + s$ æquationem, quæ in alias duas secundi gradus, natura sua, est divisibilis. Jamque, si per appositionem communis quantitatis, fuerit $x^2 + px : 2 + y$ radix quadrata partis prioris; fiet $(p^2 : 4 + 2y) x^2 + pyx + y^2$ quantitas, ad utramque æquationis partem addenda.

992. Addendo autem $(p^2 : 4 + 2y) x^2 + pyx + y^2$ ad utramque partem æquationis $x^4 + px^3 = qx^2 + rx + s$, habebitur $x^4 + px^3 + (p^2 : 4 + 2y) x^2 + pyx + y^2 = (q + p^2 : 4 + 2y) x^2 + (r + py) x + (s + y^2)$. Quumque æquationis hujus utraque pars esse debeat quadratum perfectum, fiet $(q + p^2 : 4 + 2y) \cdot (s + y^2) = (r : 2 + py : 2)^2$: proindeque erit $y^3 + qy^2 : 2 + (s - pr : 4) y + (qs : 2 + p^2 s : 8 - r^2 : 8) = 0$ æquatio cubica, per quam determinari debet quantitas y. Ea autem determinata, comperta quoque fiet quantitas $(p^2 : 4 + 2y) x^2 + pyx + y^2$, quæ ad utramque æquationis partem addi debet, ut utraque quadratum perfectum evadat. Unde, per additionem hujus quantitatis, & per extractionem quadratæ radicis, habebuntur æquationes secundi gradus, in quas ea, de qua agitur, est divisibilis.

CA-

CAPUT III.

Generalis æquationes resolvendi methodus.

993. HActenus resolutionem exhibuimus earum æquationum, quarum propria sedes, sive in tertio, sive in quarto gradu subsistit. Nunc generalem æquationes resolvendi methodum in medium afferemus. Hanc statim ab initio proponere, nequaquam duximus; tum, quia resolutiones æquationum tertii, & quarti gradus sæpissime usuveniunt, adeoque seorsim erant explicandæ; tum etiam, quia, earum æquationum resolutionibus intellectis, facile erit, generalem methodum intelligere, quo omnium cujuscumque gradus æquationum resolutio possit obtineri. Est autem hujus capitis argumentum inauditum fere apud vulgus Algebristarum. Nam principia, quibus generalis æquationes resolvendi methodus innititur, nulli hactenus innotuere.

I. *Theoremata, quibus generalis æquationes resolvendi methodus innititur.*

994. UT generalis æquationes resolvendi methodus rectius intelligatur, illud primo sciendum est, quod radix cujuscumque æquationis, quæ terminis omnibus sit repleta, tot terminos generaliter continere potest, quot sunt dimensiones ipsius æquationis, & non plures; hoc est, unum, si æquatio

tio fuerit primi gradus ; duos, si secundi ; tres, si tertii ; quatuor, si quarti ; atque ita deinceps. Neque vero inficiamur, posse quandoque pauciores terminos includere. Nam, quemadmodum fieri potest, ut in æquatione unus, aut plures ex terminis intermediis deficiant ; ita evenire pariter potest, ut in radice ipsius æquationis unus, aut plures ex iis terminis desint.

995. Sciendum est secundo, quod ex terminis, quos continet radix cujuscumque æquationis, unus debet semper adæquare eam partem coefficientis secundi termini, quam ostendit gradus ipsius æquationis : nimirum semissem, si æquatio fuerit secundi gradus; trientem, si tertii; quadrantem, si quarti ; atque ita in infinitum. Hinc, siquidem in æquatione secundus terminus desit, deficiet etiam in radice terminus ille: proindeque, si, deleto semper secundo termino, eas tantum æquationes resolvendas nobis proponemus, quæ secundo termino carent ; radices ipsarum non plures poterunt terminos continere, quam sunt dimensiones ipsarum æquationum, una dempta.

996. Sciendum est tertio, quod, sicuti radix æquationis, quæ secundo termino caret, tot terminos comprehendere potest, & non plures, quot sunt dimensiones ipsius æquationis, una dempta ; ita termini illi radicales sint oportet ejus gradus, ad quem ascendit eadem æquatio. Qua ratione, si æquatio, secundo termino carens, sit tertii gradus ; radix erit binomia, & uterque terminus radicis erit radicalis cubica. Atque ita pariter, si æquatio fuerit quarti gradus ; radix erit trinomia, & tres ejus termini

erunt radicales quadrato-quadratæ.

997. Sciendum eſt denique, quod termini, quos continet radix cujuſque æquationis, ſecundo termino multatæ, non modo eſſe debent radicales ejus gradus, ad quem ipſa aſcendit æquatio; verum etiam tales ſint oportet, ut id, quod eſt ſub ſigno radicali in termino primo, ſit radix quadrata ejus, quod eſt in ſecundo; cubica illius, quod eſt in tertio; quadrato-quadrata ejus, quod eſt in quarto; atque ita deinceps. Id vero quum ita ſit, perſpicuum eſt, quod, etſi termini, ex quibus conſtat radix æquationis, debeant eſſe radicales ejus gradus, cujus eſt æquatio ipſa; fieri tamen poteſt, ut unus, aut plures ex iis ſint radicales gradus inferioris, quia forte ad illas deprimi queunt.

998. Unde ego hujuſmodi hauſerim theoremata, quæ nec ullibi leguntur, nec ita facile demonſtrari poſſunt; non vacat hoc loco dicere. Iis autem innititur generalis æquationes reſolvendi methodus. Et licebit, eorum veritatem experiri in iis æquationibus, quarum reſolutio jam tradita eſt. Hunc in finem meminiſſe oportet, ſecundum terminum ex quavis æquatione
*art. 578. deleri, augendo, vel minuendo * radices ea parte ſui coefficientis, quam gradus indicat æquationis. Unde, præter terminos, quos exigit radix æquationis, ſecundo termino multatæ, nulli dubium eſſe poteſt, quin, pro æquatione, terminis omnibus repleta, radix continere debeat terminum alium, qui eam partem adæquet coefficientis ſecundi termini, quam ipſius æquationis gradus oſtendit.

999. Id quum ita ſit, ſufficiet, traditis reſo-

solutionibus, comprobare ea dumtaxat theoremata, quæ respiciunt æquationes, in quibus secundus terminus deest. Ac primo quidem, si æquatio fuerit secundi gradus, necesse est, ut ejus radix sit * monomia, & ut unicus ille radicis terminus sit * radicalis quadrata. Id autem liquet abunde. Ubi enim æquatio secundi gradus caret secundo termino, exhiberi ea potest per hanc formulam generalem $x^2 + q = 0$. Plane vero, ex tritissima ejus resolutione, perspicuum est, talis æquationis radicem esse monomiam, & præterea unicum ejus terminum esse radicalem quadratam. *art.995. *art.996.

1000. Deinde, si æquatio fuerit tertii gradus, oportebit; primo, ut radix ejus sit * binomia; secundo, ut radicis terminus uterque sit * radicalis cubica; ac demum, ut id, quod est sub signo radicali in termino primo, sit * radix quadrata ejus, quod est in secundo. Vidimus autem superius*, quod, si $x^3 + qx + r = 0$ referat æquationem cubicam, secundo termino carentem, & fiat $x = y - q : 3y$; determinari debet valor ipsius y, ope quadratæ hujus æquationis $y^6 + y^3 = q^3 : 27$. Unde, si valor, qui eruitur pro y^3 ex æquatione ista, vocetur a; habebitur $y = \sqrt{}^3 a$: proindeque, sicuti erat $x = y - q : 3y$; ita fiet $x = \sqrt{}^3 a - q : 3\sqrt{}^3 a$. Quum autem $q : 3\sqrt{}^3 a$ tantundem valeat, ac $(q : 3a)\sqrt{}^3 a^2$; erit etiam $x = \sqrt{}^3 a - (q : 3a)\sqrt{}^3 a^2$; atque adeo jam liquet propositum. *art.995. *art.996. *art.997. *art.912.

1001. Denique, ubi æquatio est quarti gradus, plane opus erit; primo, ut radix ejus sit * trinomia; secundo, ut singuli radicis termini sint * radicales quadrato-quadratæ; ac demum, *art.995. *art.996.

ut id, quod est sub signo radicali in termino primo, sit * radix quadrata ejus, quod est in secundo, & cubica illius, quod est in tertio. Rem vero subinde se habere, haud arduum erit ostendere. Si enim $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ referat æquationem quarti gradus, secundo termino carentem; jam vidimus supra*, considerari eam posse, velut ortam ex multiplicatione duarum istarum secundi gradus $x^2 + yx + (q:2 + y^2:2 - r:2y) = 0$, & $x^2 - yx + (q:2 + y^2:2 + r:2y) = 0$, dummodo valor ipsius y inveniatur, ope cubicæ hujus æquationis $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$.

* art. 997.
* art. 951.

1002. Vocetur itaque a valor, qui eruitur pro y^2 ex cubica ista æquatione. Et, quemadmodum fit $y = \surd a$, ita duæ illæ æquationes secundi gradus evadent $x^2 + x\surd a + (q:2 + a:2 - r:2\surd a) = 0$, & $x^2 - x\surd a + (q:2 + a:2 + r:2\surd a) = 0$. Unde ex quacumque earum æquationum valor ipsius x eruatur, liquet, valorem istum induere semper hanc formam $b\surd a + c\surd(d + e:\surd a)$. Plane vero, scribendo g loco $\surd[e:2 + \surd(e^2:4 - d^2a:4)]$, & f loco $d:2g$; fiet $\surd(d + e:\surd a) = g:\surd^4 a + f\surd^4 a$. Quare, sicuti erat $x = b\surd a + c\surd(d + e:\surd a)$, ita habebitur $x = b\surd a + cg:\surd^4 a + cf\surd^4 a$. Quumque $b\surd a$ idem valeat, ac $b\surd^4 a^2$; & $cg:\surd^4 a$ tantundem sit, ac $(cg:a)\surd^4 a^3$; erit etiam $x = cf\surd^4 a + b\surd^4 a^2 + (cg:a)\surd^4 a^3$, omnino, ut oportet.

1003. Cæterum, quod scribendo g loco $\surd[e:2 + \surd(e^2:4 - d^2a:4)]$, & f loco $d:2g$, fiat $\surd(d + e:\surd a) = g:\surd^4 a + f\surd^4 a$, facile erit ostendere. Esto enim $\surd(d + e:\surd a) = g:\surd^4 a + f\surd^4 a$. Et, utraque hujus æquationis parte

te quadrata, erit etiam $d + e : \sqrt{a} = g^2 : \sqrt{a} + 2fg + f^2\sqrt{a}$, sive etiam $d + e : \sqrt{a} = 2fg + (g^2 + af^2) : \sqrt{a}$. Hinc, comparatis ordine terminis unius quantitatis cum terminis alterius, fiet $d = 2fg$, & $e = g^2 + af^2$: proindeque, quum prior æquatio det jam $f = d : 2g$; per substitutionem, secunda evadet $e = g^2 + ad^2 : 4g^2$, hoc est $g^4 - eg^2 + ad^2 : 4 = 0$. Hæc autem æquatio, quum sit derivativa secundi gradus, dabit primo $g^2 - e : 2 = \sqrt{(e^2 : 4 - ad^2 : 4)}$, sive $g^2 = e : 2 + \sqrt{(e^2 : 4 - ad^2 : 4)}$. Quare, per extractionem quadratæ radicis, præbebit quoque $g = \sqrt{[e : 2 + \sqrt{(e^2 : 4 - ad^2 : 4)}]}$.

II. *Qua ratione cujusque æquationis resolutio peragi debeat.*

1004. PRæmissis principiis, quibus generalis æquationes resolvendi methodus innititur; videamus modo, qua ratione, ope eorum principiorum, ipsa æquationum resolutio peragi debeat. Res igitur huc redit. Nimirum primo, ut assumatur indeterminate æquatio simplex, quæ unam exhibeat ex radicibus æquationis resolvendæ. Deinde, ut simplex ista æquatio ad eundem illum gradum elevetur, cujus est æquatio proposita. Ad hæc, ut in eadem æquatione, subinde ad eum gradum elevata, distinguantur a se mutuo partes, quæ propositæ æquationis terminis correspondent. Et denique, ut, istarum partium cum terminis illis comparatione instituta, notentur æquationes, quæ exinde derivantur. Sed singula ista paulo fusius oportet explicentur.

1005. Primo igitur assumenda est indeterminate æquatio simplex, quæ resolvendæ æquationis radicem unam exhibeat. Quia vero ex æquatione resolvenda supponimus semper ablatum secundum terminum; simplicem illam æquationem ita quidem sumere oportebit, ut tamen ipsa radix tot terminos contineat *, quot sunt dimensiones ejus, de qua agitur, una dempta. Unde, sicuti debet esse $x + a = 0$, quum æquatio est secundi gradus; & $x + a + b = 0$, quum æquatio est tertii gradus; ita eadem fiet $x + a + b + c = 0$, ubi æquatio ascendit ad quartum gradum; $x + a + b + c + d = 0$, ubi æquatio ad quintum gradum evehitur; atque ita deinceps.

* art. 995.

1006. Secundo assumpta simplex æquatio evehi debet ad eundem illum gradum, cujus est æquatio proposita, ut nempe cum ipsa possit comparari. Verum, in elevatione ista peragenda, transferendi sunt prius ad partem alteram termini omnes, ex quibus constat radix, per æquationem exhibita, quo maneat ad partem unam incognita sola. Qua ratione, si assumpta æquatio fuerit $x + a = 0$; erit primo, per transpositionem, $x = -a$; tum quadratis partibus; fiet $x^2 = a^2$, atque adeo $x^2 - a^2 = 0$. Atque ita quoque, si habeatur $x + a + b = 0$; primo erit, transponendo, $x = -a - b$; tum, utraque parte ad cubum elevata, fiet $x^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$; & consequenter $x^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$.

1007. Tertio, postquam illa simplex æquatio evecta est, exposita* ratione, ad eundem gradum cum æquatione proposita, distinguenda sunt

* art. 1006.

sunt in ea partes, quæ propositæ æquationis terminis correspondent. Sane in harum partium discretione methodi hujus artificium potissimum situm est; & si quæ difficultas occurrit in hac methodo, ea in hujusmodi partium discretione deprehenditur. Interim, ad eam facilius obtinendam, non parum conducit illud theorema, quod termini, ex quibus constat radix cujusque æquationis, secundo termino multatæ, esse debent* radicales ejus gradus, ad quem ascendit æquatio; & tales quoque, ut id, quod est sub signo radicali in termino primo, sit* quadrata radix ejus, quod est in secundo; cubica illius, quod est in tertio; quadrato-quadrata ejus, quod est in quarto; atque ita deinceps. Nam, ope ejus theorematis, facile apparebit, quæ quantitates sint rationales, quæve secus. *art. 996. *art. 997.

1008. Denique, discretis in ea æquatione partibus, quæ propositæ æquationis terminis correspondent, instituenda est comparatio partium unius cum terminis alterius. Atque, hujus comparationis ope, jam habebuntur totidem aliæ æquationes, quot requiruntur, ad determinandas quantitates, quæ in assumpta æquationis radice continentur. Unde non aliud superest, quam, ut vulgatis methodis, per eas æquationes, quantitates istæ determinentur. Ubi notandum, unam radicis partem determinari semper per æquationem, una dimensione minorem ea, quæ resolvenda proponitur; secundam per æquationem, duplici dimensione minorem; tertiam per æquationem, una adhuc dimensione minorem; atque ita deinceps: adeo, ut in resolvendis æquationibus, nisi gradatim procedatur,

nihil, beneficio hujus methodi, proficere licebit.

1009. Cæterum in resolutione æquationum distinguendæ sunt sedulo æquationes, quarum dimensiones sunt numero impares, ab æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares. Quemadmodum enim eæ tantum æquationes tertii gradus resolvi possunt, quæ unam habent radicem realem, & alias duas imaginarias; ita generaliter, semper ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero impares, tunc demum obtineri poterit ejus resolutio, quum una tantum radix est realis, & reliquæ omnes imaginariæ sunt. Unde æquationum, quæ dimensiones habent numero impares, frustra instituitur resolutio, quotiescumque in iis plures, quam una, radices reales extiterint.

1010. Quantum vero ad æquationes, quæ dimensiones habent numero pares, istæ progrediuntur eadem omnino lege, quæ locum habet in æquationibus quatuor dimensionum. Jam enim æquationes quarti gradus tunc demum resolvi possunt, quotiescumque duas habent radices reales, & alias duas imaginarias. Generaliter ergo, semper ac resolvenda proponitur æquatio aliqua, cujus dimensiones sunt numero pares, tunc tantum licebit, resolutionem ejus obtinere, quum duæ ipsius radices sunt reales, & aliæ omnes imaginariæ. Quocirca æquationum, quæ dimensiones habent numero pares, frustra tentatur resolutio, ubi in iis plures, quam duæ, radices reales occurrunt.

1011. Quod autem dictum est, æquationes quarti gradus tunc demum resolvi posse, quoties-

tiescumque duas habent radices reales, & alias duas imaginarias; notavimus alibi *, id intelligendum esse de iis æquationibus quarti gradus, quæ affectionem cubicam continent. Nam, si immunes fuerint a cubica affectione, adeo nempe, ut per radicales quadratas dividi possint in alias duas secundi gradus; tunc diximus, posse earum resolutionem obtineri, etiamsi radices omnes habeant reales. Et ad eundem modum omnis æquatio, quæ dimensiones habet numero pares, si dividi possit in alias duas parium quoque dimensionum, beneficio radicalium quadratarum, resolvi quandoque poterit, tametsi plures contineat radices reales, quam duas.

* art. 969.

III. *Resolutio æquationum tertii gradus per methodum traditam.*

1012. Generali æquationes omnes resolvendi ratione summatim explicata, applicemus modo eandem uni, aut alteri casui speciali, puta æquationibus tertii, & quarti gradus. Sane non negamus, istiusmodi methodum innotuisse aliquo modo vulgaribus Algebristis in resolutione æquationum cubicarum; sed nec etiam negari potest, methodi hujus artificium non satis eos exploratum habuisse: indeq; factum, ut ad æquationes, tum quarti, cum altioris gradus eadem methodus minime fuerit ab iis promota.

1013. Ubi enim quæstio fuit de invenienda radice una cubicæ æquationis $x^3 + qx + r = 0$, ipsi etiam assumpserunt $x + a + b = 0$, atque adeo $x^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$. Sed ubi

ubi loco $3a^2b + 3ab^2$ subrogarunt $-3abx$, & æquationem illam mutarunt in hanc aliam $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$, ex cujus comparatione cum proposita æquatione $x^3 + qx + r = 0$ obtinuerunt, tam $q = -3ab$, quam $r = a^3 + b^3$; id casu potius, quam ulla solida ratione, præstiterunt.

1014. Namque non alia de causa ad id fuerunt adducti, quam quia, quum sit $x + a + b = 0$, sive $x = -a - b$, multiplicando per $-3ab$, fit $-3abx = 3a^2b + 3ab^2$. Sed utraque pars æquationis $x = -a - b$ poterat peræque multiplicari, sive per $-a^2$, sive per $-b^2$; atque adeo scribi, vel $-a^2x$ loco $a^3 + a^2b$, vel $-b^2x$ loco $ab^2 + b^3$. Quin etiam poterant ambæ partes æquationis $x = -a - b$ multiplicari quoque, vel per $-ab$, vel per $-2ab$; & consequenter poni, vel $-abx$ loco $a^2b + ab^2$; vel $-2abx$ loco $2a^2b + 2ab^2$.

1015. Itaque, quum, ad inveniendam radicem æquationis $x^3 + qx + r = 0$, ea tantum substitutio fieri possit, ac debeat, per quam ponitur $-3abx$ loco $3a^2b + 3ab^2$; plane necesse est, ut aliunde hujus rei ratio sit repetenda. Et quamquam, ubi sic * æquationes cubicas resolvere docuimus, nos quoque a vulgato aliorum sermone non discesserimus; id tamen vitio nobis verti non debet, quandoquidem non dum jacta erant principia, ex quibus genuina ejus rei ratio repeti debet.

* art. 367.

1016. Videamus ergo, unde id, de quo agitur, proprie sit eruendum. Nimirum, quum in æquatione $x^3 + qx + r = 0$, quantitates q & r sint rationales; tales quoque esse debent

quan-

quantitates, quas cum iis comparare oportebit. Plane vero, quum a, & b esse debeant * radicales cubicæ, & id, quod est sub signo radicali in a, quadrata radix sit * oporteat ejus, quod est in b; utique ex quantitatibus duarum dimensionum, quæ ex iis formari possunt, nec a^2, nec b^2 rationalis erit, sed tantum ab. Quare dumtaxat quantitas ab comparari poterit cum q. *art. 996. *art. 997.

1017. Comparanda est vero triplicata, & cum signo negativo, ut prorsus deleantur termini $3a^2b + 3ab^2$. Iis namque deletis, supersunt termini $a^3 + b^3$, quorum uterque rationanalis est, atque adeo summa conferri potest cum r, quæ similiter est quantitas rationalis: quum jam, si ex terminis $3a^2b + 3ab^2$ aliquid superesset, non posset id, quod superest, una cum $a^3 + b^3$ compari cum r; quandoquidem, nec a^2b, nec ab^2 est quantitas rationalis.

1018. Liquet igitur, cur, pro invenienda radice una æquationis $x^3 + qx + r = 0$, exhibita per æquationem simplicem $x + a + b = 0$, sive $x = -a - b$, poni debeat $-3abx$ loco $3a^2b + 3ab^2$ in hac alia æquatione, exinde derivata, $x^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$: nimirum, quia, substitutione ista peracta, æquatio $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$ fit ejusdem formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^3 + qx + r = 0$; quum fiat rationalis, tam coefficiens tertii termini $-3ab$, quam ipse ultimus terminus $a^3 + b^3$.

1019. Iisdem autem principiis insistendo, patet etiam, quomodo per hanc methodum institui debeat resolutio generalis æquationum cubicarum. Sit enim $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

æqua-

æquatio cubica resolvenda, terminis omnibus repleta. Jamque ejus radix tres partes habere debet, quarum prima rationalis sit oportet, itemque æqualis * trienti coefficientis secundi termini; aliæ vero duæ radicales cubicæ tales, ut id, quod est sub signo radicali in una, sit * radix quadrata ejus, quod est in secunda.

* art. 995.
* art. 997.

1020. Sit ergo $x + p : 3 + a + b = 0$, sive $x = - p : 3 - a - b$ æquatio simplex, hanc ejus radicem exhibens. Et, cubatis partibus, erit etiam $x^3 + p^3 : 27 + ap^2 : 3 + a^2p + a^3 + bp^2 : 3 + 2abp + 3a^2b + b^2p + 3ab^2 + b^3$. Quia vero eadem æquatio $x = - p : 3 - a - b$, ad quadratum elevata, dat quoque $x^2 = p^2 : 9 + 2ap : 3 + a^2 + 2bp : 3 + 2ab + b^2$; multiplicando per p, erit $px^2 = p^3 : 9 + 2ap^2 : 3 + a^2p + 2bp^2 : 3 + 2abp + b^2p$, & $px^2 - 2p^3 : 27 - ap^2 : 3 - bp^2 : 3 = p^3 : 27 + ap^2 : 3 + a^2p + bp^2 : 3 + 2abp + b^2p$: proindeque, substitutione peracta, fiet $x^3 + px^2 - 2p^3 : 27 - ap^2 : 3 - bp^2 : 3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$.

1021. Nunc, ut æquatio ista fiat ejusdem plane formæ cum ea, de qua agitur, notandum est, quod, sicuti ex quantitatibus duarum dimensionum, quæ ipsis p, a, b formari possunt, dumtaxat p^2, & ab sunt rationales; ita ex quantitatibus trium dimensionum, quæ iisdem p, a, b fieri queunt, rationales tantummodo sunt p^3, abp, a^3, b^3. Unde omnino necesse est, ut coefficiens tertii termini componatur tantum ex p^2, & ab; & ut ipse ultimus terminus coalescat dumtaxat ex p^3, abp, a^3, & b^3.

1022. Quæ autem sint veræ eorum composi-

sitio-

fitiones, analytice inquiremus in hunc modum. Capiantur numeri indeterminati m, & n, fitque mp^2+nab coefficiens termini tertii. Jamque, multiplicando utramque partem æquationis $x= -p:3-a-b$ per mp^2+nab, fiet $mp^2x+nabx=-mp^3:3-map^2-mbp^2-nabp:3-na^2b-nab^2$. Plane vero æquationis hujus pars posterior talis esse debet, ut exhauriat æquationis præcedentis terminos $-ap^2:3-bp^2:3+3a^2b+3ab^2$: quod manifestum est fieri non posse, nisi fuerit $m=1:3$, & $n=-3$

1023. Id quum ita sit, fiet $p^2:3-3ab$ coefficiens tertii termini. Quumque habeatur $p^2x:3-3abx=-p^3:9-ap^2:3-bp^2:3+abp+3a^2b+3ab^2$, sive $p^2x:3-3abx+p^3:27-abp=-2p^3:27-ap^2:3-bp^2:3+3a^2b+3ab^2$; præcedens illa æquatio $x^3++px^2-2p^3:27-ap^2:3-bp^2:3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=0$, substitutionis ope, vertetur in hanc aliam $x^3+px^2+p^2x:3-3abx+p^3:27-abp+a^3+b^3=0$: qua ratione jam fiet ejusdem plane formæ cum æquatione $x^3+px^2+qx+r=0$; atque adeo erit $q=p^2:3-3ab$, & $r=p^3:27-abp+a^3+b^3$.

1024. Quum itaque fit $q=p^2:3-3ab$, erit $b=(p^2:3-q):3a$. Quare, scribendo in alia æquatione loco b valorem istum, eadem fiet $r=p^3:27-p^3:9+pq:3+a^3+(p^2:3-q)^3\ 27a^3$, sive $a^6-(2p^3:27-r+pq:3)a^3+(p^2:3-q)^3:27=0$, quæ ita quidem ascendit ad sex dimensiones, ut tamen pro derivativa secundi gradus debeat haberi. Unde, ope ejus, facile erit, determinare valorem ipsius a: quo

quo quidem invento, habebitur etiam valor ipsius b, quum sit $b = (p^2 : 3 - q) : 3a$.

IV. *Resolutio æquationum quarti gradus per eandem methodum.*

1025. QUum traditæ methodi artificium plene nunc nobis innotescat, experiamur modo eandem methodum in resolutione æquationum quarti gradus. Sit ergo $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$ æquatio resolvenda. Et, assumpta simplici æquatione $x + a + b + c = 0$, quæ unam ejus radicem exhibeat, fiet etiam $x^4 - a^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 - 4a^3c - 12a^2bc - 12ab^2c - 4b^3c - 6a^2c^2 - 12abc^2 - 6b^2c^2 - 4ac^3 - 4bc^3 - c^4 = 0$ quæ sane æquatio reddenda est ejusdem formæ cum æquatione proposita $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$.

1026. Res autem eo redit, ut in æquatione illa partes distinguamus, quæ comparari debent seorsim cum terminis propositæ æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Quod sane factu haud arduum erit, si memoria recolamus, æquationem simplicem $x + a + b + c = 0$ non posse exhibere unam ex radicibus æquationis $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$, nisi quantitates a, b, c fuerint radicales * quadrato-quadratæ; & id, quod est sub signo radicali in a, sit * radix quadrata ejus, quod est in b, & cubica illius, quod est in c.

* *art.* 996.

* *art.* 997.

1027. Hinc enim clare liquet, rationales esse posse dumtaxat b^2, & ac ex quantitatibus duarum dimensiodum; dumtaxat a^2b, & bc^2 ex quantitatibus trium dimensionum; & dumtaxat a^4, b^4, c^4, a^2c^2, & ab^2c ex quantitatibus qua-

quatuor dimensionum, quæ ipsis a, b, c formari possunt. Ex quo fit, ut componi queat, tantum ex b^2, & ac coefficiens tertii termini; tantum ex ab^2, & bc^2 coefficiens quarti termini; & tantum ex a^4, b^4, c^4, a^2c^2, & ab^2c ipse ultimus terminus.

1028. Quæ quum ita sint, in id modo incumbendum est, ut veras eorum compositiones detegamus. Istas autem analytice investigabimus in hunc modum. Capiantur numeri indeterminati h, k, m, n; sitque $hb^2 + kac$ coefficiens tertii termini, & $ma^2b + nac^2$ coefficiens quarti. Multiplicando itaque $hb^2 + kac$ per x^2, sive $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, orietur $ha^2b^2 + 2hab^3 + hb^4 + 2hab^2c + 2hb^3c + hb^2c^2 + ka^3c + 2ka^2bc + kab^2c + 2ka^2c^2 + 2kabc^2 + kac^3$. Et similiter, multiplicando $ma^2b + nbc^2$ per x, sive $-a-b-c$; prodibit $-ma^3b - ma^2b^2 - ma^2bc - nabc^2 - nb^2c^2 - nbc^3$.

1029. Jam, sicuti summa utriusque producti est $-ma^3b - (m+h)a^2b^2 + 2hab^3 + hb^4 + ka^3c - (m+2k)a^2bc + (2h+k)ab^2c + 2hb^3c + 2ka^2c^2 - (n+2k)abc^2 - (n+h)b^2c^2 + kac^3 - nbc^3$, ita hæc eadem summa talis esse debet, ut exhauriat præcedentis illius æquationis terminos $-4ab^3 - 6a^2b^2 - 4ab^3 - 4a^3c - 12a^2bc - 4b^3c - 12abc^2 - 6b^2c^2 - 4ac^3 - 4bc^3$. Id vero fieri non potest, nisi omnes istæ æquationes obtineant $m = 4$, $m - h = 6$, $2h = -4$, $k = -4$, $m - 2k = 12$, $2h = -4$, $n - 2k = 12$, $n - h = 6$, $k = -4$, & $n = 4$.

1030. Patet autem, ope harum æquationum, fieri $h = -2$, $k = -4$, $m = 4$, & $n = 4$. Quare coefficiens tertii termini, qui erat $hb^2 +$

kac,

$4ac$, fiet $-2b^2-4ac$, & coefficiens quarti termini, qui erat ma^2b+nbc^2, evadet $4a^2b+4bc^2$. Quumque habeatur $-2b^2x^2-4acx^2=-2a^2b^2-4ab^3-2b^4-4ab^2c-4b^3c-2b^2c^2-4a^3c-8a^2bc-4ab^2c-8a^2c^2-8abc^2-4ac^3$, & $4a^2bx+4bc^2x=-4a^3b-4a^2b^2-4a^2bc-4abc^2-4b^2c^2-4bc^3$; erit $-2b^2x^2-4acx^2+4a^2bx+4bc^2x=-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3-2b^4-8ab^2c-4b^3c-6b^2c^2-4a^3c-12a^2bc-8a^2c^2-12abc^2-4ac^3-4bc^3$, & $-2b^2x^2-4acx^2+4a^2bx+4bc^2x+2b^4+8ab^2c+8a^2c^2=-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3-4b^3c-6b^2c^2-4a^3c-12a^2bc-12abc^2-4ac^3-4bc^3$.

1031. Hinc præcedens illa æquatio $x^4-a^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3-b^4-4a^3c-12a^2bc-12ab^2c-4b^3c-6a^2c^2-12abc^2-6b^2c^2-4ac^3-4bc^3-c^4=0$, substitutionis ope, vertetur in hanc aliam $x^4-2b^2x^2-4acx^2+4a^2bx+4bc^2x-a^4+b^4-4ab^2c+2a^2c^2-c^4=0$: qua ratione jam fiet ejusdem plane formæ cum æquatione, de qua agitur, $x^4+qx^2+rx+s=0$: proindeque erit $q=-2b^2-4ac$, $r=4a^2b+4bc^2$, & $s=b^4-a^4-c^4-4ab^2c+2a^2c^2$; nec aliud modo superest, quam, ut, beneficio harum æquationum, valores inquiramus ipsarum a, b, c.

1032. Et quidem, tametsi a sit primus terminus assumptæ radicis, præstat nihilominus prius determinare b, quæ refert terminum secundum; nam, velut radicalis quadrata, æquationum præbet, pro sui determinatione, non adeo compositam. Itaque, quum prima æquatio $q=-2b^2-4ac$ det $q+2b^2=-4ac$; multi-

pli-

plicando per b^2, erit $qb^2 + 2b^4 = -4ab^2c$ proindeque in tertia æquatione $s = b^4 - a^4 - c^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2$, scribendo pro $-4ab^2c$ valorem illum, habebitur loco ejus hæc alia $s = 3b^4 - a^4 - c^4 + qb^2 + 2a^2c^2$, sive $a^4 + c^4 = 3b^4 + qb^2 + 2a^2c^2 - s$.

1033. Ulterius, quia secunda æquatio $r = 4a^2b + 4bc^2$ præbet $r:4b = a^2 + c^2$, quæ, quadratis partibus, evadit $r^2:16b^2 = a^4 + 2a^2c^2 + c^4$; fiet quoque $a^4 + c^4 = r^2:16b^2 - 2a^2c^2$. Quare erit $r^2:16b^2 - 2a^2c^2 = 3b^4 + qb^2 + 2a^2c^2 - s$, sive $r^2:16b^2 - 3b^4 - qb^2 + s = 4a^2c^2$. Denique, quia prima æquatio $q = -2b^2 - 4ac$ dat $q:2 + b^2 = -2ac$, quæ, evecta ad quadratum, exhibet $q^2:4 + qb^2 + b^4 = 4a^2c^2$; erit $q^2:4 + qb^2 + b^4 = r^2:16b^2 - 3b^4 - qb^2 + s$, hoc est $4b^6 + 2qb^4 + q^2b^2:4 - sb^2 - r^2:16 = 0$, sive etiam $b^6 + qb^4:2 + (q^2 - 4s)b^2:16 - r^2:64 = 0$.

1034. Jam æquatio ista subinde ad sex dimensiones ascendit, ut tamen pro derivativa tertii gradus debeat haberi. Itaque, ope ejus, facile erit, definire valorem ipsius b. Eo autem invento, valores aliarum a, & c in promptu erunt. Quum enim per primam æquationem habeatur $q^2:4 + qb^2 + b^4 = 4a^2c^2$; multiplicando per b, fiet $q^2b:4 + qb^3 + b^5 = 4a^2bc^2$. Jam vero secunda æquatio præbet $4bc^2 = r - 4a^2b$, sive etiam $4a^2bc^2 = ra^2 - 4a^4b$. Itaque erit $q^2b:4 + qb^3 + b^5 = ra^2 - 4a^4b$, hoc est $a^4 - ra^2:4b + (4b^4 + 4qb^2 + q^2):16 = 0$.

1035. Hæc autem æquatio, ubi notus est valor ipsius b, non aliam indeterminatam continet, quam a. Quia vero eadem subinde ad qua-

tuor dimensiones attollitur, ut tamen pro derivativa secundi gradus habenda sit; jam licebit ea mediante, ipsius a valorem definire. Sed, inventis valoribus utriusque quantitatis a, & b determinabitur valor tertiæ c per æquationem simplicem, sive primi gradus. Nam, quum habeatur in prima æquatione $q = -2b^2 - 4ac$ fiet $c = (-2b^2 - q):4a$.

1036. Nolo interim hoc loco reticere, quod *art.1033 æquatio, mox * inventa, pro determinando valore ipsius b, non modo est ejusdem formæ, verum etiam relationem habet cum cubica illa, *art.943. quam superius*derivavimus ex æquatione quarti gradus $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Est enim illiusmodi æquatio $b^6 + qb^4 : 2 + (q^2 - 4s)b^2 : 16 - r^2 : 64 = 0$. Plane vero, si fiat $2b = y$, & scribatur $y^2 : 4$ loco b^2, $y^4 : 16$ loco b^4, & $y^6 : 64$ loco b^6; vertetur eadem in hanc aliam $y^6 + 2qy^4 + (q^2 - 4s)y^2 - r^2 = 0$, quæ est *art.943. ipsa æquatio cubica, superius * derivata.

V. *Eadem æquationes resolvendi methodus paulo aliter administrata.*

1037. Quam modo, pro resolvendis æquationibus omnibus, generalem methodum exhibuimus, alia etiam ratione administrare licebit, quam, ad rem visum est, breviter hoc loco subjungere. Nimirum, assumpta rursus æquatione simplici, quæ unam resolvendæ æquationis radicem exhibeat; poterit ipsa æquatio, de qua agitur, dividi per alteram illam simplicem æquationem. Quum enim divisio fie- *art.403. ri debeat*exacte, & absque ullo residuo; id, quod

re-

remanet, perducta quousque fieri potest divisione, zero æquale esse oportebit. Quare, explorando, qui termini se mutuo destruere valent; habebuntur æquationes, quarum ope determinandæ sunt partes radicis assumptæ.

1038. Ita, si resolvenda sit æquatio tertii gradus $x^3 + qx + r = 0$, erit $x + a + b = 0$ æquatio simplex, quæ unam ejus radicem exhibet. Plane vero, dividendo æquationem $x^3 + qx + r = 0$ per hanc aliam $x + a + b = 0$; fiet quotiens $x^2 - ax - bx + q + a^2 + 2ab + b^2$, & manebit in dividendo $r - qa - qb - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$. Unde, quum residuum istud zero æquale esse debeat, orietur hæc alia æquatio $r - qa - qb - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3 = 0$: proindeque non aliud superest, quam, ut in hac alia æquatione distinguantur termini, qui se invicem destruere possunt.

1039. Hanc vero terminorum distinctionem facili quidem negotio obtinebimus, si rursus memoria recolamus, quantitates a, & b radicales esse * cubicas, & id, quod est sub signo radicali in a, esse * radicem quadratam ejus, quod est in b. *art. 996. *art. 997.
Hinc enim clare liquet, ipsis a, & b non alias quantitates trium dimensionum, quæ sint rationales, fieri posse, nisi a^3, & b^3. Unde, quum nec a^2b, nec ab^2 sit quantitas rationalis, utique duo termini $- 3a^2b - 3ab^2$ ad destructionem ipsius r concurrere nequeunt, sed unice inservient ad delendos alios duos $- qa - qb$.

1040. Fieri autem potest, ut, non solum ipsis $- 3a^2b - 3ab^2$, sed portione aliqua reliquorum terminorum $- a^3 - b^3$ delendi sint duo $- qa - qb$. Itaque, ut id investigemus, consi-

derabimus primo, quod, si duo termini $-qa-qb$ dividantur per $-a-b$, divisio fit exacte, & quotiens oritur q, qui est quantitas rationalis. Quare destruentur termini illi per solos duos $-3a^2b-3ab^2$, si etiam isti duo sint subinde divisibiles. Plane vero, diviso $-3a^2b-3ab^2$ per $-a-b$, divisio fit absque ullo residuo, & quotiens gignitur $3ab$, qui, attenta indole ipsarum a, & b, etiam est quantitas rationalis. Unde nulli dubium esse potest, quin destructio terminorum $-qa-qb$ fiat per solos $-3a^2b-3ab^2$.

1041. Jam, quum, ad delendos terminos $-qa-qb$, sufficiant termini $-3a^2b-3ab^2$; omnino necesse est, ut per alios duos $-a^3-b^3$ destruatur r. Quæ quum ita sint, fiet, non modo $-qa-qb-3a^2b-3ab^2=0$, sive $q+3ab=0$, verum etiam $r-a^3-b^3=0$: & propterea erunt $q=-3ab$, & $r=a^3+b^3$ æquationes duæ, quarum ope determinandæ sunt partes radicis assumptæ, nimirum quantitates a, & b: quas liquet esse easdem illas, in quas superius * incidimus.

* ar. 1018

1042. Similiter, si resolvenda sit æquatio quarti gradus $x^4+qx^2+rx+s=0$; erit $x+a+b+c=0$ æquatio simplex, unam ejus radicem exhibens. Profecto autem, dividendo æquationem $x^4+qx^2+rx+s=0$ per hanc aliam $x+a+b+c=0$, fiet quotiens $x^3-ax^2-bx^2-cx^2+qx+a^2x+2abx+b^2x+2acx+2bcx+c^2x+r-qa-qb-qc-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3-3a^2c-6abc-3b^2c-3ac^2-3bc^2-c^3$, & manebit in dividendo $s-ra-rb-rc+qa^2+2qab+qb^2+2qac+2qbc+qc^2+a^4+4a^3b+6a^2b^2$

$+4ab^3$

$+ 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$.

1043. Quum autem residuum istud zero æquale esse debeat; habebitur hæc alia æquatio $s - ra - rb - rc + qa^2 + 2qab + qb^2 + 2qac + 2qbc + qc^2 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$. Unde eo res redit, ut in hac alia æquatione terminos distinguamus, qui se mutuo destruere valent. Quod quidem factu facile erit, si in memoriam revocemus, quantitates a, b, c, radicales esse* quadrato-quadratas; & id, quod est sub signo radicali in a, esse * radicem quadratam ejus, quod est in b, & cubicam illius, quod est in c.

*art. 996.

*art. 997.

1044. Hinc enim, clare liquet, ipsis a, b, c non alias quantitates quatuor dimensionum, quæ sint rationales, fieri posse, quam a^4, b^4, c^4, ab^2c, a^2c^2. Unde, quum nulla harum aliarum a^3b, a^2b^2, ab^3, a^3c, a^2bc, b^3c, abc^2, b^2c^2, ac^3, bc^3 sit quantitas rationalis; utique termini $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 4a^3c + 12a^2bc + 4b^3c + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3$ ad destructionem ipsius s concurrere nequeunt, sed unice inservient ad delendos terminos alios $- ra - rb - rc + qa^2 + 2qab + qb^2 + 2qac + 2qbc + qc^2$.

1045. Fieri vero potest, ut, non solum ipsis $4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 4a^3c + 12a^2bc + 4b^3c + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3$, sed portione aliqua reliquorum terminorum $a^4 + b^4 + 12ab^2c + 6a^2c^2 + c^4$ delendi sint termini $- ra - rb - rc + qa^2 + 2qab + qb^2 + 2qac + 2qbc + qc^2$. Quare, ut id investigemus, notabimus

primo, quod, si termini isti dividantur per $-a-b-c$, divisio fit exacte, & absque ullo residuo; quum oriatur quotiens $r-qa-qb-qc$: proindeque destruentur iidem termini per solos $4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+4a^3c+12a^2bc+4b^3c+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3$, si etiam istorum summa sit subinde divisibilis.

1046. Jam summa terminorum $4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+4a^3c+12a^2bc+4b^3c+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3$ est divisibilis per $-a-b-c$, ubi ei additur hæc alia summa $2b^4+8ab^2c+8a^2c^2$; quum fiat quotiens $-4a^2b-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4bc^2-4ac^2-2b^2c$. Quare, destructio terminorum $-ra-rb-rc+qa^2+2qab+qb^2+2qac+2qbc+qc^2$, non modo fit per terminos $4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+4a^3c+12a^2bc+4b^3c+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3$, verum etiam per istos alios $2b^4+8ab^2c+8a^2c^2$: & propterea, quia id, quod remanet, subtrahendo $2b^4+8ab^2c+8a^2c^2$ ex $a^4+b^4+12ab^2c+6a^2c^2+c^4$ est $a^4-b^4+4ab^2c-2a^2c^2+c^4$; fiet $s+a^4-b^4+4ab^2c-2a^2c^2+c^4=0$, & $r-qa-qb-qc-4a^2b-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4bc^2-4ac^2-2b^2c=0$.

1047. Ulterius, iisdem a,b,c non aliæ quantitates trium dimensionum, quæ sint rationales, fieri possunt, quam a^2b, & bc^2. Quare in postrema æquatione termini $-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4ac^2-2b^2c$ ad destructionem ipsius r concurrere nequeunt, sed unice inservient ad delendos terminos alios $-qa-qb-qc$. Num vero, una cum iis, alii ad hoc opus sint adhibendi, constabit nobis, si sedulo consideremus, quod

quod, dividendo terminos $-qa-qb-qc$ per $-a-b-c$, divisio fit exacte, & quotiens oritur q, qui est quantitas rationalis. Hinc enim fiet, ut non aliter iidem termini $-qa-qb-qc$ destrui possint per solos $-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4ac^2-2b^2c$, quam si etiam summa istorum sit subinde divisibilis.

1048. Et quidem, dividendo $-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4ac^2-2b^2c$ per $-a-b-c$, divisio perficitur absque ullo residuo, & quotiens oritur $2b^2+4ac$. Unde, quia quotiens iste, attenta natura quantitatum a, b, c, est rationalis; revera destruere licebit terminos $-qa-qb-qc$ per solos $-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4ac^2-2b^2c$: proindeque fiet, non modo $-qa-qb-qc-2ab^2-2b^3-4a^2c-4abc-4ac^2-2b^2c=0$, sive $q+2b^2+4ac=0$, verum etiam $r-4a^2b-4bc^2=0$: & propterea æquationes, pro determinandis quantitatibus a, b, c, erunt rursus, ut supra *, $q=-2b^2-4ac$, $r=4a^2b+4bc^2$, & $s=b^4-a^4-c^4-4ab^2c+2a^2c^2$. * ar. 1031

1049. Cæterum nolo hic silentio præterire, quod illa æquatio, quam exhibet residuum primæ divisionis, haberi etiam potest, substituendo in æquatione resolvenda loco incognitæ valorem assumptæ radicis. Ita, dividendo $x^3+qx+r=0$ per $x+a+b=0$, fuit * $r-qa-qb-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=0$ æquatio, ex residuo orta: & profecto, si in ipsa æquatione $x^3+qx+r=0$ loco x scribatur $-a-b$, eadem æquatio orietur. Atque ita quoque, dividendo $x^4+qx^2+rx+s=0$ per $x+a+b+c=0$, præbuit * residuum æquatio- * ar. 1038 * ar. 1043

nem istam $s - ra - rb - rc + qa^2 + 2qab + qb^2 + 2qac + 2qbc + qc^2 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4 = 0$, quæ etiam prodibit, si loco x scribatur $-a-b-c$ in ipsa æquatione $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$.

CAPUT IV.

Æquationum numericarum per limites resolutio.

1050. RESolutionem æquationum, quæ existunt in propria sua sede, vidimus, non semper posse obtineri. Quare, quum æquationes fuerint numericæ, juvabit, saltem determinare limites, quibus radices ipsarum continentur. Etsi enim, hac ratione, veri earum radicum valores nobis non innotescant; dubitari tamen non potest, quin eos præter propter subinde assequi liceat. De resolutione igitur æquationum numericarum per limites hoc capite agendum nobis erit. Quod sane agentes, alia etiam ratione radices imaginarias in æquationibus investigare docebimus.

I. *Principia, quibus theoria limitum innititur, demonstrata.*

1051. SI omnes æquationis radices essent reales, liceret, determinare limites, intra quos radices illæ consistunt, inveniendo me-

the-

thodo, superius * tradita, limitem, quem radi- * art. 554,
ces nullæ, quæ sint ejusdem signi, transgrediantur. 557.
Etsi enim, beneficio ejus methodi, videatur dumtaxat definiri posse limes pro maxima radice, quæ sit signi illius; attamen, quia radix quælibet, augendo, vel minuendo radices omnes, fieri potest minima, deinde minima converti in maximam: facile erit, eandem methodum ad radices omnes extendere.

1052. Sed, præterquamquod methodus ista locum sibi vindicat, dumtaxat in æquationibus, quæ nullas habent radices imaginarias; ob difficilem calculum, nec etiam videtur ad praxim accomodata. Potius in hac re usui nobis esse posset methodus, quam tertio loco exhibuimus, pro reducendis æquationibus, in quibus aliqua componentium est simplex. Nam, sicuti, quum radices sunt radicales, ope ejus methodi, determinare semper licebit duos illos numeros naturales, unitate se excipientes, intra quos cadit unaquæque earum radicum; ità methodus illa ad æquationes omnes se extendit, nec nimio calculo laborat.

1053. Placet interim hoc loco, pro inveniendis limitibus cujusque radicis, aliam methodum usurpare, quæ ut rectius intelligatur, sternenda sunt prius principia, quibus eadem innititur. Nimirum, jam notum est, non aliam quantitatem, scriptam in æquatione quavis loco incognitæ, efficere posse, ut æquationis termini omnes evanescant, quam quæ radix est ipsius æquationis. Itaque omnis alia quantitas, quæ non sit radix, substituta incognitæ loco, dabit semper aliquid pro summa terminorum o-

omnium

mnium. Plane vero, si duarum quantitatum una præbeat aliquid positivum, & altera aliquid negativum; omnino necesse est, ut detur in æquatione saltem radix una, cujus quantitates illæ sint limites.

1054. Ut id ostendamus, capiatur æquatio aliqua $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Jamque, si quatuor ejus radices sint a, b, c, d; fiet $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x - a) . (x - b) . (x - c) . (x - d)$. Sint porro m, & n quantitates tales, ut prior m, substituta loco x, det aliquid positivum; & altera n, scripta adhuc loco x, præbeat aliquid negativum. Necesse est ergo, ut ex quatuor factoribus $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ unus in utraque substitutione contrariis signis oriatur. Sit ille $x - a$. Duarum igitur quantitatum $m - a$, $n - a$ una erit positiva, altera negativa. Quod fieri non potest, nisi duarum m, & n una sit major, & altera minor, quam a; hoc est, nisi m, & n sint limites ipsius a.

1055. Ex ipsa autem demonstratione patet, radicem illam a, cujus m, & n sunt limites, debere esse realem, & non imaginariam. Nam, si ea imaginaria foret, quia numerus harum radicum semper est par; daretur in eadem æquatione alia radix similiter imaginaria. Sit hæc alia b. Plane vero, quia duæ istæ radices debent esse, vel hujus formæ $f + \sqrt{-g^2}$, $f - \sqrt{-g^2}$, vel etiam istius $-f + \sqrt{-g^2}$, $-f - \sqrt{-g^2}$; productum ex $x - a$ in $x - b$ erit semper positivum, quæcumque quantitas scribatur loco x. Itaque, nec per factorem $x - a$, nec per factorem $x - b$ variari poterit signum producti

(x

$(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$: & propterea fiet variatio per factorem alium, quem radix realis ingrediatur.

1056. Huic, quod modo demonstravimus, theoremati consequens est, ut, si termini alicujus æquationis, cujus omnes radices sint positivæ, puta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, multiplicentur per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, fient radices ejus æquationis limites radicum æquationis novæ $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$: adeo nempe, ut si quatuor radicum prioris minima sit a, huic proxima b, paulo major c, & maxima d; atque trium radicum posterioris minima sit f, media g, & maxima h: cadet, f quidem inter ipsas a, & b; g vero inter ipsas b, & c; ac demum h inter ipsas c, & d.

1057. Ad id ostendendum, minuantur radices propositæ æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ quantitate aliqua e, scribendo nempe $y + e$ loco x. Jamque, transformatione peracta, habebitur loco ejus hæc alia æquatio $y^4 + (4e - p)y^3 + (6e^2 - 3pe + q)y^2 + (4e^3 - 3pe^2 + 2qe - r)y + (e^4 - pe^3 + qe^2 - re + s) = 0$, quæ evadet $y^3 + (4e - p)y^2 + (6e^2 - 3pe + q)y + (4e^3 - 3pe^2 + 2qe - r) = 0$, ubi quantitas illa e aliquam adæquat quatuor radicum a, b, c, d ipsius æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; quum in hoc casu evanescat ejus ultimus terminus $e^4 - pe^3 + qe^2 - re + s$.

1058. Ponamus itaque primo $e = a$; &, sicuti tres reliquæ radices erunt $b - a$, $c - a$, $d - a$, ita erit $4a^3 - 3pa^2 + 2qa - r = (b - a)$.

mnium. Plane vero, si duarum quantitatum una præbeat aliquid positivum, & altera aliquid negativum; omnino necesse est, ut detur in æquatione saltem radix una, cujus quantitates illæ sint limites.

1054. Ut id ostendamus, capiatur æquatio aliqua $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Jamque, si quatuor ejus radices sint a, b, c, d; fiet $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = (x - a).(x - b).(x - c).(x - d)$. Sint porro m, & n quantitates tales, ut prior m, substituta loco x, det aliquid positivum; & altera n, scripta adhuc loco x, præbeat aliquid negativum. Necesse est ergo, ut ex quatuor factoribus $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ unus in utraque substitutione contrariis signis oriatur. Sit ille $x - a$. Duarum igitur quantitatum $m - a$, $n - a$ una erit positiva, altera negativa. Quod fieri non potest, nisi duarum m, & n una sit major, & altera minor, quam a; hoc est, nisi m, & n sint limites ipsius a.

1055. Ex ipsa autem demonstratione patet, radicem illam a, cujus m, & n sunt limites, debere esse realem, & non imaginariam. Nam, si ea imaginaria foret, quia numerus harum radicum semper est par; daretur in eadem æquatione alia radix similiter imaginaria. Sit hæc alia b. Plane vero, quia duæ istæ radices debent esse, vel hujus formæ $f + \sqrt{-g^2}$, $f - \sqrt{-g^2}$, vel etiam istius $-f + \sqrt{-g^2}$, $-f - \sqrt{-g^2}$; productum ex $x - a$ in $x - b$ erit semper positivum, quæcumque quantitas scribatur loco x. Itaque, nec per factorem $x - a$, nec per factorem $x - b$ variari poterit signum producti

(x

$(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d)$: & propterea fiet variatio per factorem alium, quem radix realis ingrediatur.

1056. Huic, quod modo demonstravimus, theorematí consequens est, ut, si termini alicujus æquationis, cujus omnes radices sint positivæ, puta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, multiplicentur per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, fient radices ejus æquationis limites radicum æquationis novæ $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$: adeo nempe, ut si quatuor radicum prioris minima sit a, huic proxima b, paulo major c, & maxima d; atque trium radicum posterioris minima sit f, media g, & maxima h: cadet, f quidem inter ipsas a, & b; g vero inter ipsas b, & c; ac demum h inter ipsas c, & d.

1057. Ad id ostendendum, minuantur radices propositæ æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ quantitate aliqua e, scribendo nempe $y + e$ loco x. Jamque, transformatione peracta, habebitur loco ejus hæc alia æquatio $y^4 + (4e - p)y^3 + (6e^2 - 3pe + q)y^2 + (4e^3 - 3pe^2 + 2qe - r)y + (e^4 - pe^3 + qe^2 - re + s) = 0$, quæ evadet $y^3 + (4e - p)y^2 + (6e^2 - 3pe + q)y + (4e^3 - 3pe^2 + 2qe - r) = 0$, ubi quantitas illa e aliquam adæquat quatuor radicum a, b, c, d ipsius æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; quum in hoc casu evanescat ejus ultimus terminus $e^4 - pe^3 + qe^2 - re + s$.

1058. Ponamus itaque primo $e = a$; &, sicuti tres reliquæ radices erunt $b - a$, $c - a$, $d - a$, ita erit $4a^3 - 3pa^2 + 2qa - r = (b - a)$.

$-a).(c-a).(d-a)$. Ponamus secundo $e=b$; &, quemadmodum fient tres aliæ radices $a-b$, $c-b$, $d-b$, ita erit $4e^3-3pe^2+2qe-r=(a-b).(c-b).(d-b)$. Ponamus tertio $e=c$; &, ut radices tres reliquæ erunt $a-c$, $b-c$, $d-c$, sic fiet $4e^3-3pe^2+2qe-r=(a-c).(b-c).(d-c)$ Ponamus denique $e=d$; & in hac hypothesi, non modo erunt tres aliæ radices $a-d$, $b-d$, $c-d$, verum etiam habebitur $4e^3-3pe^2+2qe-r=(a-d).(b-d).c-d)$.

1059. Jam, attenta indole radicum a, b, c, d, quatuor ista facta $(b-a).(c-a).(d-a$, $(a-b).(c-b).(d-b$, $(a-c).(b-c).(d-c$, $(a-d).(b-d).(c-d)$ alternatim oriri debent signis $+$, & $-$ affecta. Quare in æquatione $4e^3-3pe^2+2qe-r=0$, sive $4x^3-3px^2+2qx-r=0$, per substitutionem successivam quantitatum a, b, c, d, una vice habetur aliquid positivum, & alia vice aliquid negativum. Unde, per ostensum * theorema, omnino necesse est; ut a, & b sint limites radicis minimæ f; b, & c limites radicis mediæ g; ac demum c, & d limites radicis maximæ h ipsius æquationis $4x^3-3px^2+2qx-r=0$.

* ar. 1053

1060. Quemadmodum vero radices quatuor a, b, c, d æquationis $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ sunt limites trium radicum f, g, h alterius hujus æquationis $4x^3-3px^2+2qx-r=0$; ita per contrarium tres radices istius f, g, h sunt limites duarum radicum illius, quæ sunt mediæ inter maximam, & minimam, hoc est duarum b, & c. Jam enim, ex ostensis, b major est, quam f, & mi-

& minor, quam g. Itaque duæ f, & g erunt limites ipsius b. Et similiter, quum ostensum sit, c majorem esse, quam g, & minorem, quam h; fient duæ g, & h limites alterius c.

1061. Quod si autem considerabimus: (id, quod mox ostendemus,) maximum coefficientem negativum ipsius æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, sumptum positive, & auctum saltem unitate una, majorem esse qualibet ejus radice; determinare etiam licebit limites aliarum radicum a, & d. Est namque f major, quam a; estque etiam h minor, quam d. Quare, sicuti zero, & f sunt limites ipsius a; ita h, & coefficiens ille, positive sumptus, & auctus unitate una, erunt limites ipsius d. Qua ratione, vocando k coefficientem illum, subinde sumptum, & auctum; erunt o, f, g, h, k limites radicum a b, c, d.

1062. Ex eo porro, quod quatuor radices a, b, c, d æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ sunt limites trium radicum f, g, h alterius hujus æquationis $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$; sequitur, quod, ubi eæ radices sunt reales, etiam radices istæ reales * esse debent. Sed non hinc sequitur viciſsim, reales esse debere radices prioris æquationis, ubi reales extiterint radices secundæ. Nam radices secundæ æquationis non aliter evadunt limites duarum radicum primæ, quæ sunt mediæ inter maximam, & minimam, quam in hypothesi, quod istius radices omnes sunt limites trium radicum illius.

* ar. 1055

1063. Illud utique tuto inferre licebit, dari in æquatione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ duas saltem radices imaginarias, ubi in alia æqua-

quatione $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$ imaginariæ radices extiterint. Nam, si nullæ darentur in ipsa $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ radices imaginariæ, sed omnes essent reales; ut jam dictum est *, forent etiam reales radices omnes æquationis $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$: quod est contra hypothesim. Atque hac ratione, ut deinceps ostendemus, investigare fas erit, num in aliqua æquatione radices adsint imaginariæ.

* ar. 1062

1064. Cæterum, si termini æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ multiplicentur, haud quidem per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, sed per quasvis alias quantitates, arithmetice proportionales, ut $m + 4n$, $m + 3n$, $m + 2n$, $m + n$, m; adhuc radices quatuor ipsius a, b, c, d fient limites trium radicum æquationis novæ $(m + 4n)x^4 - (m - 3n)px^3 + (m + 2n)qx^2 - (m - n)rx + ms = 0$: proindeque omnia illa, quæ exinde deduximus, hic pariter locum habebunt.

1065. Nec difficile id erit ostendere. Nam æquatio nova constat ex duabus partibus, quarum una est $mx^4 - mpx^3 + mqx^2 - mrx + ms$, altera $4nx^4 - 3npx^3 + 2nqx^2 - nrx$. Plane vero pars prior, quum sit ipsa æquatio $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ ducta in m, semper evanescit, scribendo pro x successive a, b, c, d. Unde id, quod superest, per substitutionem harum quantitatum in nova illa æquatione, ex parte altera repeti debet: quæ, quum sit præcedens æquatio $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$ ducta in nx, vim allatæ demonstrationis nequaquam evertet.

II.

II. *Ratio determinandi limites radicum cujusque æquationis.*

1066. PRæmissis principiis, quibus theoria limitum innititur; videamus modo, qua ratione, iis mediantibus, determinandi sint limites radicum cujusque æquationis. Hunc in finem illud primo curandum est, ut propositæ æquationis termini omnes habeant alternatim signa $+$, & $-$: quo nempe omnes ejus radices fiant positivæ. Neque vero id factu difficile erit; quum satis sit, transformare ipsam æquationem in aliam, cujus radices sint residua, quæ oriuntur, subtrahendo radices prioris ex maximo coefficiente negativo, positive sumpto, & aucto saltem unitate una.

1067. Ut, si æquatio sit $x^4 - px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, & maximus coefficiens negativus sit q, ponendo $q + 1 = m$, & faciendo $x = m - y$, habebitur loco ejus hæc alia $(m - y)^4 - p(m - y)^3 - q(m - y)^2 - r(m - y) + s = 0$. Plane vero, quum termini cujuscumque potestatis radicis binomiæ $m - y$ oriri debeant alternatim signis $+$, & $-$ affecti; sitque q, sive $m - 1$ major omni alio coefficiente negativo propositæ æquationis $x^4 - px^3 - qx^2 - rx + s = 0$: omnino necesse est, ut etiam in nova illa æquatione oriantur termini omnes signis $+$, & $-$ alternatim affecti.

1068. Atque hinc modo patet veritas ejus, quod paulo ante * dictum est: nimirum, quod in æquatione, omnes radices positivas habente, maximus coefficiens negativus, sumptus positive, * ar. 1061

& au-

& auctus saltem unitate una, major esse debet unaquaque radice. Nam, si per eum coefficientem, subinde sumptum, & auctum, transformetur æquatio; adhuc in æquatione nova radices omnes erunt positivæ. Unde, quia radices novæ æquationis sunt residua, quæ oriuntur, subtrahendo radices prioris ex eodem illo coefficiente; plane oportebit, ut singulæ prioris radices sint eo minores.

1069. Quum ergo, ad inveniendos limites radicum alicujus æquationis, necesse sit, ut termini ejus habeant alternatim signa $+$, & $-$; non aliter, quam sub ista conditione, assumemus æquationes, quæ, pro explicanda doctrina limitum, usui nobis esse debent. Sit itaque primum æquatio secundi gradus $x^2 - 12x + 34 = 0$. Multiplicentur termini ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; & orietur æquatio nova $2x^2 - 12x = 0$, sive $x - 6 = 0$. Hinc limites radicum propositæ æqua-
*ar. 1061 tionis erunt * 0, 6, 12; hoc est una radix cadet inter 0, & 6; altera inter 6, & 12.

1070. Sed danda modo est opera, ut limites isti arctiores evadant, & unitate tantum a se invicem differant: quod sane fiet in hunc modum. Quoniam, substitutione primi limitis, 0, manet aliquid positivum; is pro prima radice usque adeo augeri debet, donec semper aliquid supersit positivum. Plane vero præstat effectum istum, usque donec fit 4. Quare prima radix erit inter 4, & 5. Quia autem, substitutione secundi limitis 6, manet aliquid negativum; hic pro secunda radice eo usquè augeri debet, donec semper aliquid supersit negati-

vum:

rum: & propterea, quia id habetur, usque donec fit 7; erit secunda radix inter 7, & 8.

1071. Sit secundo æquatio tertii gradus $x^3 - 18x^2 + 102x - 180 = 0$. Multiplicentur termini ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, & fiet $3x^3 - 36x^2 + 102x = 0$, sive $x^2 - 12x + 34 = 0$ æquatio nova. Plane vero duæ hujus radices una cum 0, & 181 debent esse * limites trium radicum illius. Quare, quum ex duabus illius radicibus, ut modo * vidimus, una sit inter 4, & 5; altera inter 7, & 8: omnino necesse est, ut ex tribus radicibus æquationis, de qua agitur, una sit inter 0, & 5; altera inter 4, & 8; ac tertia demum inter 7, & 181.

* ar. 1061

* ar. 1070

1072. Efficiendum est modo, ut limites isti contrahantur, & non amplius, quam unitate, a se mutuo differant. Hunc in finem notabimus primo, quod, sicuti prima radix cadit inter 0, & 5; ita, substitutione limitis 0, manet aliquid negativum. Id vero quum ita sit, liquet, limitem istum 0, pro prima radice, eo usque augendum esse, donec semper aliquid præbeat negativum. Unde, quia præstat effectum istum, usqne donec evadit 3; consequens est, ut limites arctiores primæ radicis sint 3, & 4.

1073. Notabimus secundo, quod, sicuti secunda radix cadit inter 4, & 8; ita, substitutione limitis 4, aliquid superest positivum. Quare limes iste, pro secunda radice, eo usque debet augeri, donec semper aliquid positivum exhibeat. Plane vero, si augeatur unitate una, & fiat 5; adhuc, ejus substitutione, aliquid remanet positivum. Et, si ulterius, unitate alia augeatur, &

fiat 6; non quidem præbet aliquid positivum, sed destruitur summa terminorum omnium æquationis. Unde secunda radix rationalis fiet, nimirum 6; nec ideo pro ea ullis limitibus opus erit.

1074. Notabimus demum, quod, sicuti tertia, & ultima radix cadit inter 7, & 181; ita, substitutione limitis 7, aliquid manet negativum. Quare hujusmodi limes, pro tertia radice, eo usque augendus est, donec semper aliquid supersit negativum. Unde, quia præstat effectum istum, usque donec evadit 8; cadet tertia radix inter 8, & 9. Quæ quum ita sint, concludendum est, ex tribus radicibus æquationis propositæ, unam esse 6; aliam cadere inter 3, & 4; ac tertiam demum reperiri inter 8, & 9.

1075. Sit demum æquatio quarti gradus $x^4 - 24x^3 + 204x^2 - 720x + 868 = 0$. Multiplicentur termini ejus per numeros dimensionum, ad quas in iis ascendit incognita; & erit $4x^4 - 72x^3 + 408x^2 - 720x = 0$, sive $x^3 - 18x^2 + 102x - 180 = 0$ æquatio nova. Jam
*ar. 1061 tres hujus radices una cum 0, & 721 debent * esse limites quatuor radicum illius. Unde, quum
*ar. 1074 ex tribus illius radicibus, ut modo * ostensum est, una sit 6; alia cadat inter 3, & 4; ac tertia demum reperiatur inter 8, & 9: plane necesse, ut ex quatuor radicibus propositæ æquationis una sit inter 0, & 4; altera inter 3, & 6; tertia inter 6, & 9; ac ultima demum inter 8, & 721.

1076. Neque vero difficile erit, arctiores reddere limites istos, & efficere, ut unitate tantum a se mutuo differant. Jam enim prima radix cadit inter 0, & 4. Plane vero, substitu-

tio-

tione limitis o, aliquid remanet positivum. Itaque limes iste, pro prima radice, eo usque debet augeri, donec semper aliquid præbeat positivum. Quum ergo id habeatur, usque donec evadit 2; consequens est, ut limites arctiores primæ radicis sint 2, & 3.

1077. Similiter secunda radix cadit inter 3, & 6; atque id, quod superest, substitutione limitis 3, negativum deprehenditur. Necesse est igitur, limitem istum 3, pro secunda radice, eo usque augere, donec semper aliquid negativum exhibeat. Jam præstat effectum istum, usque donec incrementum subeat duarum unitatum, & evadat 5. Quare erunt 5, & 6 limites arctiores secundæ radicis.

1078. Eadem ratione, quemadmodum tertia radix cadit inter 6, & 9; ita, substitutione limitis 6, aliquid manet positivum. Oportet ergo, limitem istum 6, pro tertia radice, usque eo augere, donec semper aliquid præbeat positivum. Plane vero, etiamsi unitate una augeatur, & fiat 7; illico id, quod remanet, negativum evadit. Quare ejusmodi limes nullum incrementum pati potest: & propterea tertiæ radicis limites arctiores erunt 6, & 7.

1079. Denique, sicuti quarta, & ultima radix cadit inter 8, & 721; ita, substitutione limitis 8, aliquid remanet negativum. Id vero quum ita sit, eo usque limitem istum 8, pro quarta radice, augere oportebit, donec semper aliquid negativum exhibeat. Unde, quia id habetur, si tantum augeatur unitate una, & fiat 9; consequens est, ut 9, & 10 sint limites arctiores quartæ radicis.

1080. Cæterum, quod, per hanc methodum, veri radicum limites determinantur; licebit, id experiri, per ipsas æquationis radices. Ita in æquatione secundi gradus $x^2 - 12x + 34 = 0$ duæ ejus radices sunt $6 - \sqrt{2}$, & $6 + \sqrt{2}$: profecto autem harum radicum una cadit inter 4, & 5; altera inter 7, & 8. Similiter in æquatione cubica $x^3 - 18x^2 + 102x - 180 = 0$, sicuti radix rationalis est 6, ita aliæ duæ radices sunt $6 - \sqrt{6}$, & $6 + \sqrt{6}$: harum autem radicum una extat inter 3, & 4; altera inter 8, & 9.

1081. Tandem, quod attinet ad æquationem quarti gradus $x^4 - 24x^3 + 204x^2 - 720x + 868 = 0$, ea oritur ex multiplicatione duarum istarum secundi gradus $x^2 - 8x + 14 = 0$, & $x^2 - 16x + 62 = 0$. Quare quatuor ejus radices erunt $4 - \sqrt{2}$, $4 + \sqrt{2}$, $8 - \sqrt{2}$, & $8 + \sqrt{2}$. Patet autem, limites harum radicum tales esse, quales superius exhibuimus. Nam earum prima cadit inter 2, & 3; secunda extat inter 5, & 6; tertia reperitur inter 6, & 7; ac ultima demum habet sedem suam inter 9, & 10.

III. *Observationes quædam circa traditam methodum, pro determinandis radicum limitibus.*

1082. IN explicanda methodo, qua radicum limites determinantur, æquationes assumpsimus, in quibus omnes radices sunt reales. Sed fieri potest, ut in æquatione dentur radices imaginariæ. Et, sicuti istarum radicum, velut impossibilium, nulli sunt limites; ita & methodus nullos pro iis limi-

mi-

mites exhibet. Unde, si quandoque deficere methodus videatur, tantum abest, ut vitio ei id debeat adscribi, quin potius nobis indicabit, dari in æquatione radices aliquas imaginarias.

1083. Ne autem in determinandis limitibus, qui unitate tantum a se mutuo differant, tempus teratur inutiliter; observandum hoc loco est, quod ipsi primi limites radices produnt imaginarias. Jam enim, pro radice reali, methodus præbet ejusmodi limites, ut, substituti in æquatione loco incognitæ, unus exhibet aliquid positivum, & alter aliquid negativum. Quare, si contingat, tales haberi limites, ut uterque, per substitutionem, aliquid præbeat positivum: plane necesse est, ut imaginaria sit radix, ad quam limites illi referuntur.

1084. Esto, exempli gratia, æquatio secundi gradus $x^2 - 4x + 5 = 0$. Sane, multiplicatis terminis ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; fit $2x^2 - 4x = 0$, sive $x - 2 = 0$ æquatio nova. Itaque limites duarum radicum illius erunt 0, 2, 5. Quum ergo quisque horum limitum, scriptus in æquatione loco x, exhibeat aliquid positivum; duas ejus æquationis radices imaginarias esse, dicendum est. Nec sane aliter se res habet. Nam earum radicum una est $2 + \sqrt{-1}$, altera $2 - \sqrt{-1}$; & utramque, liquet, imaginariam esse.

1085. Esto etiam æquatio trium dimensionum $x^3 - 12x^2 + 42x - 32 = 0$. Jam, si termini ejus multiplicentur per numeros dimensionum, ad quas in iis ascendit incognita; fiet $3x^3 - 24x^2 + 42x = 0$, sive $x^2 - 8x + 14 = 0$ æquatio nova. Itaque duæ hujus radices

una cum o, & 33 erunt limites radicum illius. Quum autem ex duabus radicibus æquationis $x^2 - 8x + 14 = 0$ una sit inter 2, & 3; altera inter 5, & 6: plane necesse est, ut ex tribus radicibus propositæ æquationis $x^3 - 12x^2 + 42x - 32 = 0$ una cadat inter o, & 3; altera inter 2, & 6; ac tertia demum inter 5, & 33.

1086. Jam limites primæ radicis o, & 3 sunt quidem hujusmodi, ut scripti in æquatione loco incognitæ x, alter præbeat aliquid negativum, & alter aliquid positivum. Verum ex aliis duabus radicibus unaquæque tales limites habet, ut quisque, per sui substitutionem, quidpiam positivum exhibeat. Quare consequens est, ut propositæ æquationis $x^3 - 12x^2 + 42x - 32 = 0$ una tantum radix sit realis, cujus limites arctiores erunt 1, & 2; & ut aliæ duæ radices sint plane imaginariæ.

1087. Observandum est etiam, quod, sicuti, per hanc methodum, inveniuntur limites radicum irrationalium; ita, beneficio ejusdem methodi, detegere etiam licebit radices rationales, si quæ sunt in æquatione, de qua agitur. Jam enim limites, quos primo methodus exhibet, velut non adeo ad veram radicem appropinquantes, paulo amplius arctiores reddi debent. Plane vero, si radix, ad quam limites illi referuntur, fuerit rationalis; omnino necesse est, ut in isto limitum accessu, alter ipsorum veram radicem exhibeat.

1088. Hujus rei specimen habuimus, ubi quæstio fuit * de inveniendis limitibus cubicæ hujus æquationis $x^3 - 18x^2 + 102x - 180 = 0$. Limites namque, quos primo methodus

* ar. 1071

exhi-

exhibuit, fuerunt o, & 5 pro prima radice; 4, & 8 pro secunda radice; nec non 7, & 181 pro radice tertia. Profecto autem, sicuti limites arctiores evaserunt 3, & 4 relate ad primam radicem, atque 8, & 9 relate ad tertiam; ita efficiendo, ut limites radicis mediæ magis accederent ad se mutuo, novimus *, eam radicem rationalem esse, & senarium numerum adæquare. *ar. 1073

1089. Interim, ut clarius hoc idem evadat, proponatur æquatio $x^2 - 12x + 35 = 0$. Plane, multiplicando terminos ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; fiet $2x^2 - 12x = 0$, sive $x - 6 = 0$ æquatio nova. Quare limites radicum illius erunt 0, 6, 13; hoc est una radix cadet inter 0, & 6, altera inter 6, & 13. Efficiendo autem, ut arctiores evadant limites isti; cognoscemus, earundem radicum unam esse 5, alteram 7: quemadmodum revera, multiplicando $x - 5 = 0$ per $x - 7 = 0$, producitur æquatio $x^2 - 12x + 35 = 0$.

1090. Observandum est tertio, quod radix, ad quam limites, quos primo methodus prodit, referuntur, quandoque magis accedit ad limitem minorem, quam majorem; quandoque vicissim magis ad majorem, quam minorem. Quum autem hujus rei nullum certum argumentum haberi possit, nec item scire fas erit, quinam limes e sede sua sit removendus, ut cito arctiores evadant, & unitate tantum a se mutuo differant: proindeque indifferenter, vel minorem augere, vel majorem minuere licebit.

1091. Quod si, in limitum accessu, aliquid utrique eorum dandum esset, liceret sumere eorundem differentiam, & tentare primo loco, vel

limitem minorem, auctum differentia ista dimidiata, vel, quod idem est, limitem majorem, ejusdem differentiæ semisse minutum. Fieri vero quandoq; potest, ut differentia limitum sit impar: in quo casu medietas ejus fractionem involvit. Quare, quum id contingit, poterit, vel augeri, vel minui unitate differentia illa. Sic enim evadet par; adeoque, absque ulla fractione, semissis ejus habebitur.

1092. Proponatur, exempli gratia, æquatio secundi gradus $x^2 - 8x + 14 = 0$. Sane ex duabus ejus radicibus una cadet inter 0, & 4; altera inter 4, & 9. Quum ergo differentia priorum limitum sit 4, ejusque semissis 2; liquet, esse etiam 2, tum limitem minorem 0, auctum semisse isto, cum limitem majorem 4, eodem semisse minutum. Tento itaque 2. Et quia numerus iste, perinde ac limes minor 0, præbet aliquid positivum; cadet prior radix inter 2, & 4. Horum autem differentia dimidiata est 1, qua sive augeatur limes minor 2, sive minuatur limes major 4, habebitur semper 3: quo quidem tentato, residuum fiet negativum. Unde limites arctiores primæ radicis erunt 2, & 3.

1093. Quantum vero ad secundam radicem, quum ea cadat inter 4, & 9; erit 5 differentia suorum limitum: quæ, velut impar, unitate, oportet, vel augeatur, vel minuatur. Et quidem, augendo eam unitate, fiet 3 semissis ejus: proindeque erit 7 limes minor, adauctus semisse isto, & 6 limes major, eodem isto semisse minutus. Utroque autem tentato, semper residuum fit positivum. Quare eadem radix cadet inter 4, & 6. Quumque horum limitum differentia dimidiata

fit

fit 1; tento adhuc 5, qui habetur, tum addendo 1 ad 4, cum subtrahendo 1 ex 6. Et quoniam residuum fit negativum; erunt 5, & 6 limites arctiores secundæ radicis.

1094. Observandum est denique, quod contingere quandoque potest, ut aliquis limitum, quos primo methodus prodit, non integer, sed fractus oriatur. Et tunc sumi poterit loco ejus, vel integer proxime minor, ubi limes est minor; vel integer proxime major, ubi limes est major. Ita in æquatione $x^2 - 5x + 5 = 0$ fit $x - 5:2 = 0$ æquatio nova; adeoque una ejus radix cadit inter 0, & 5 : 2; altera inter 5 : 2, & 6. Loco autem horum limitum sumi poterunt 0, & 3 pro prima radice, nec non 2, & 6 pro radice secunda. Atque, his adhibitis, comperiemus, limites arctiores esse 1, & 2 relate ad primam radicem; ac 3, & 4 relate ad secundam.

1095. Interim, si fractus ille limes velit adhiberi, perinde methodus procedet, ac si integer esset. Ita in proposito exemplo limes 5 : 2, scriptus loco x, præbet aliquid negativum. Quare idem ille limes debet usque adeo minui pro prima radice, & usque adeo augeri pro secunda, donec semper aliquid negativum exhibeat. Deducendo autem eum ad integros, præstat effectum istum, usque donec minutus fit 2, & auctus 3. Quare, sicuti prima radix cadet inter 1, & 2; sic altera inter 3, & 4 suam sedem habebit.

1096. Quin consultius erit, semper ipsum fractum limitem adhibere. Nam contingere quandoque potest, ut nulli sint numeri inte-

gri,

gri, qui eundem præstent effectum. Ita ex duabus radicibus hujus æquationis $x^2 - 5x + 49 : 8 = 0$ una cadit inter 0, & 5 : 2; altera inter 5 : 2, & 6. Plane vero, sicuti limes 5 : 2, scriptus in æquatione loco x, relinquit aliquid negativum; ita, si loco x scribatur, tam 2, quam 3, residuum fiet semper positivum. Unde limites arctiores erunt 2, & 5 : 2 pro prima radice; nec non 5 : 2, & 3 pro radice secunda.

IV. *Methodus Newtoniana pro inveniendis limitibus radicum cujusque æquationis.*

1097. QUam modo exhibuimus methodum, pro inveniendis limitibus radicum alicujus æquationis, illud quidem exigit, ut omnes æquationis radices sint positivæ.
*nr.1066 Et quamquam, ut jam ostensum est *, id facili negotio possit obtineri; optandum tamen esset, ut res ad suam universalitatem revocaretur. Id præstitit Newtonus in sua Arithmetica universali, ubi limites maximæ radicis, tum positivæ, cum negativæ cujuscumque æquationis, paulo aliter reperire docuit. Unde, ne aliquid hic missum faciamus, quod scitu sit dignum; visum est, hanc aliam Newtoni methodum hoc loco subnectere.

1098. Alterius autem hujus methodi summa hæc est. Multiplicentur termini æquationis propositæ per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita. Tum novæ æquationis termini ducantur similiter in numeros dimensionum, ad quas in ipsa ascendit incognita. Et sic, multiplicando per numeros dimensionum conti-

nuo

nuo terminos subortæ æquationis, pergatur eo usque, donec tandem æquatio occurrat linearis. Jamque omnes istæ æquationes, subinde ex proposita deductæ, una cum ipsa æquatione, de qua agitur, ostendent nobis limites, intra quos radices æquationis, tam positivæ, quam negativæ continentur.

1099. Qui enim numerus positivus, scriptus loco incognitæ in singulis illis æquationibus, efficit, ut summa ex terminis cujuscumq; æquationis, sit ubique positiva; is erit major omni radice positiva æquationis, adeoq; limes, quem nulla ex radicibus positivis transgredietur. Qui vero numerus negativus, scriptus in iisdem æquationibus incognitæ loco, efficit, ut summa terminorum sit positiva in æquationibus, quæ dimensiones habent numero pares, & negativa in iis, quæ dimensiones habent impares numero; is erit major omni radice negativa æquationis, adeoque limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

1100. Exempli loco proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$. Multiplicentur ejus termini omnes per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita x, eritque nova æquatio $5x^5 - 8x^4 - 30x^3 + 60x^2 + 63x = 0$, sive $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$. Alterius hujus æquationis multiplicentur adhuc termini omnes per numeros dimensionum incognitæ, & habebitur nova æquatio $20x^4 - 24x^3 - 60x^2 + 60x = 0$, sive $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$. Ex nova ista æquatione, per similem terminorum multiplicationem, orietur hæc alia $15x^3 - 12x^2 - 15x = 0$,

$= 0$, five $5x^2 - 4x - 5 = 0$. Atque ex hac demum habebitur æquatio linearis $10x^2 - 4x = 0$, five $5x - 2 = 0$.

1101. Itaque ex propofita æquatione $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ deductæ funt quatuor aliæ æquationes, quarum prima eft $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 0$, fecunda $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15 = 0$, tertia $5x^2 - 4x - 5 = 0$, & quarta, feu poftrema $5x - 2 = 0$: proindeque, ad indagandum limitem, intra quem continentur omnes radices pofitivæ propofitæ æquationis, tentandum eft, quinam numerus pofitivus, fcriptus in iis quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut fumma terminorum omnium fit ubique pofitiva. Et quoniam, tentando unitatem, fit quidem $5x - 2 = 3$, fed prodit $5x^2 - 4x - 5 = -4$; limes quæfitus major erit, quam 1. Itaque tentandus eft numerus aliquis unitate major. Quumque, tentando binarium, fit in fingulis æquationibus fumma terminorum pofitiva; erit numerus 2 major unaquaque radice pofitiva.

1102. Ad indagandum vero limitem, intra quem continentur radices omnes negativæ ejufdem æquationis, inquirendum eft, quinam numerus negativus, fcriptus in iifdem quinque æquationibus loco incognitæ x, efficiat, ut fumma terminorum omnium fit pofitiva in æquationibus, quæ dimenfiones habeat numero pares, & negativa in iis, quæ dimenfiones habent impares numero. Et quoniam, nec -1, nec -2 hunc præftant effectum, tento -3. Itaque, quia pofito -3 loco incognitæ x, fit $5x - 2 = -17$, $5x^2 - 4x - 5 = 52$, $5x^3 - 6x^2 - 15x + 15$

$= -$

$= - 129$, $5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63 = 234$, & $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = - 274$, hoc est summa terminorum omnium positiva quidem in æquationibus parium dimensionum, negativa vero in æquationibus dimensionum imparium; erit $- 3$ limes, quem nulla ex radicibus negativis præteribit.

1103. Liquet igitur, per hanc methodum, limites, intra quos continentur radices, tum positivæ, cum negativæ cujuscumque æquationis, ita quidem determinari, ut radices maximas neque etiam unitate excedant. Quocirca, si augendo, vel minuendo radices æquationis propositæ, quælibet radix fiat minima, tum ex minima convertatur in maximam; jam licebit, ope hujus methodi, cujuscumque radicis talem limitem invenire, ut radice ipsa sit proxime major, neque eam excedat unitate. Et, siquidem idem limes unitate minuatur; habebitur limes alter proxime minor, qui neque etiam unitate a radice ipsa deficiet. Sic æquationis $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$ maxima radix positiva est inter 1, & 2; maxima vero radix negativa est inter $- 2$, & $- 3$.

1104. Hujus artificii, pro limitibus inveniendis, ratio pendet ex iis, quæ supra observavimus, circa transformationes æquationum, quæ fiunt additione, & subtractione. Si enim, exempli gratia, habeatur æquatio $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, eademque transformanda sit in aliam, in qua radices ipsius minutæ reperiantur quantitate cognita a; vidimus, transformatæ æquationis esse $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s$ ultimum terminum, $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r$ coefficien-

cientem termini quarti, $6a^2 + 3pa + q$ coefficientem termini tertii, & $4a + p$ coefficientem termini secundi: proindeque æquationem novam
art.572. esse $* y^4 + (4a + p) y^3 + (6a^2 + 3pa + q) y^2 + (4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r) y + (a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s) = 0$.

1105. Jam æquationes, quæ, pro inveniendis limitibus Newtoniana methodo, ex ipsa $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ eruuntur, sunt $4x^3 + 3px^2 + 2qx + r = 0$, $6x^2 + 3px + q = 0$, & $4x + p = 0$, quæ quidem, una cum æquatione, de qua agitur, non in alio differunt a coefficientibus transformatæ illius æquationis, quam notatione litterarum x, & a. Itaque, qui numerus positivus, scriptus in æquationibus illis loco x, efficit, ut summa terminorum omnium sit ubique positiva; idem, positus in iis coefficientibus loco a, efficiet quoque, ut quilque eorum evadat positivus. Et eadem ratione, qui numerus negativus, scriptus in iisdem illis æquationibus loco incognitæ x, efficit, ut summa terminorum omnium sit positiva in æquationibus dimensionum parium, & negativa in æquationibus dimensionum imparium; idem, suffectus in iis coefficientibus loco a, efficiet, ut iidem habeant alternatim signa +, & —.

1106. Plane vero, ubi in æquatione $y^4 + (4a + p) y^3 + (6a^2 + 3pa + q) y^2 + (4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r) y + (a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s) = 0$ termini omnes positivo signo afficiuntur, necesse est, ut ejus radices singulæ sint negativæ; ubi autem in eadem æquatione termini alternatim signis +, & — afficiuntur, cunctas ejus radices positivas esse oportebit. Unde,

quum

quum sit $y = x - a$; liquet, quantitatem $x - a$ debere esse negativam in primo casu, & positivam in secundo. Quod fieri non potest, nisi quantitas a, sicuti exhibet numerum aliquem positivum in primo casu, & numerum aliquem negativum in secundo; ita sit major unoquoque valore positivo ipsius x in casu priore, & unoquoque valore negativo ejusdem x in casu posteriore.

V. *Quomodo per limites ad veram radicem, quousque libuerit, potest appropinquari.*

1107. Cognitis limitibus, intra quos consistit radix æquationis, licebit, ad veram impossibilem propius semper, ac propius appropinquare per hanc methodum. Sit $x^3 - 2x - 5 = 0$ æquatio proposita. Jam maximæ radicis positivæ sit 2 limes proxime minor, & 3 limes proxime major. Quum ergo x major sit, quam 2; finge $x = 2 + p$. Et, substituto in æquatione loco x hoc ejus valore, nova prodibit æquatio $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Plane vero termini $p^3 + 6p^2$, ob parvitatem ipsius p, negligi possunt. Quare, iis neglectis, fiet $10p - 1 = 0$, atque adeo $p = 1 : 10$. Unde, sicuti erat $x = 2 + p$; ita habebitur $x = 2 + 1 : 10$, sive $x = 21 : 10$.

1108. Quum autem, ob neglectos terminos, quantitas p haud proprie adæquet $1 : 10$; nec etiam $21 : 10$ erit verus valor ipsius x. Hinc, ut ad verum valorem proprius accedamus, poni poterit $p = 1 : 10 + q$, & loco p scribi valor iste in nova illa æquatione $p^3 + 3p^2 + 10p -$

1 =

$q = 0$. Sic enim alia habebitur æquatio, in qua q geret vices incognitæ. Et, neglectis in ea terminis, in quibus q est plurium dimensionum; reducetur eadem ad æquationem simplicem, quæ dabit approximatione valorem ipsius q: quo quidem adhibito, propius appropinquabitur ad valorem ipsius p, & consequenter ad valorem incognitæ x.

1109. Potest etiam ad verum valorem incognitæ appropinquari, adhibendo *limitem* proxime majorem. Sic in eadem æquatione $x^3 - 2x - 5 = 0$ limes proxime major maximæ radicis positivæ est 3. Quare, quum x sit minor quam 3, ponatur $x = 3 - p$. Et, substituto in æquatione loco incognitæ x hoc ejus valore, prodibit hæc alia $p^3 - 9p^2 + 25p - 16 = 0$. Hæc autem, neglectis, ob parvitatem ipsius p, terminis $p^3 - 9p^2$, evadit $25p - 16 = 0$: proindeque, quum fiat $p = 16 : 25$, erit $x = 3 - 16 : 25$, hoc est $x = 59 : 25$.

1110. Interim, sicuti, ob neglectos terminos, verus valor ipsius p non est $16 : 25$; ita nec etiam $59 : 25$ habendus est pro vero valore incognitæ x. Ad eum tamen proprius appropinquabitur, faciendo $p = 16 : 25 + q$, & scribendo in alia illa æquatione $p^3 - 9p^2 + 25p - 16 = 0$ loco p valorem istum. Ita enim nova orietur æquatio, in qua incognitæ vices geret quantitas q. Et, si, neglectis terminis, in quibus q est plurium dimensionum, reducatur eadem ad æquationem simplicem; habebitur approximatione valor ipsius q; & consequenter, tum ad valorem alterius p, cum ad valorem incognitæ x propius appropinquabitur.

1111. Quoniam autem in hac methodo, pro determinanda assumpta quantitate, termini non-nulli negliguntur, fieri quandoque potest, ut valor ejus prodeat negativus. Id quum accidit, non est, cur animo concidamus; tum, quia fieri potest, ut id, quod antea lucratum est, sit justo majus, atque adeo restituatur per novum valorem negativum; tum etiam, quia id, quod in ea operatione fit jacturæ, potest in operationibus sequentibus lucrari. Instituatur ergo pluries, ac pluries hæc operatio; & ad veram radicem impossibilem propositæ æquationis propius semper, ac propius appropinquabitur.

1112. Licebit etiam, propius semper, ac propius accedere ad veram radicem, cujus noti sunt limites, eadem illa ratione, qua superius usi sumus, ut arctiores fierent limites, qui per priorem methodum deteguntur. Ita, si methodo ista quærantur limites duarum radicum hujus æquationis $x^2 - 6x + 7 = 0$; comperiemus, unam radicem existere inter 0, & 3; alteram in 3, & 7. Reddendo autem arctiores limites istos, earundem radicum una cadet inter 1, & 2; altera inter 4, & 5. Sed eadem ratione hos alios limites propius etiam ad se mutuo appropinquare licebit.

1113. Plane enim, si radices æquationis $x^2 - 6x + 7 = 0$ multiplicentur per 10, nova orietur æquatio $y^2 - 60y + 700 = 0$. Et, sicuti ex radicibus illius una cadit inter 1, & 2, altera inter 4, & 5; ita, quum eædem multiplicatæ sint per 10 in alia æquatione, omnino necesse est, ut ex radicibus alterius æquationis una reperiatur inter 10, & 20, altera inter 40, &

50. Unde arctiores evadent limites, quibus radices propositæ æquationis continentur, efficiendo, ut limites radicum istius accedant propius ad se invicem, & unitate tantum a se mutuo differant.

1114. Nimirum, quia limes 10, scriptus in æquatione $y^2 - 60y + 700 = 0$ loco incognitæ y, præbet aliquid positivum; is usque adeo pro prima radice debet augeri, donec semper positivum quidpiam exhibeat. Plane vero præstat effectum istum, usque donec fiat 15. Quare limites arctiores primæ radicis erunt 15, & 16: & propterea, quia prima radix æquationis, de qua agitur, $x^2 - 6x + 7 = 0$, est illa eadem, divisa per 10; plane oportebit, ut limites ejus arctiores sint $1 + 5 : 10$, & $1 + 6 : 10$.

1115. Eadem ratione, quia limes 40, scriptus in æquatione $y^2 - 6y + 700 = 0$ loco incognitæ y, præbet aliquid negativum; is pro secunda radice usque adeo augeri debet, donec semper negativum quidpiam exhibeat. Profecto autem residuum, quod substitutione ejus habetur, negativum deprehenditur, usque donec fiat 44. Itaque limites arctiores secundæ radicis erunt 44, & 45: proindeque, quia secunda radix æquationis, de qua est quæstio, $x^2 - 6x + 7 = 0$, est illa eadem, divisa per 10; omnino necesse est, ut limites ipsius arctiores sint $4 + 4 : 10$, & $4 + 5 : 10$.

1116. Perspicuum est autem, hoc artificio ad veram radicem posse, quousque libuerit, appropinquari. Si enim radices alterius hujus æquationis $y^2 - 60y + 700 = 0$ rursus multiplicentur per 10, nova adhuc prodibit æquatio

z^2

$z^2 - 600z + 70000 = 0$. Et, quemadmodum ex radicibus illius una cadit inter 15, & 16, altera inter 44, & 45; ita radicum istius una reperietur inter 150, & 160, altera inter 440, & 450. Quare arctiores evadent, tum limites radicum illius, cum limites radicum æquationis, de qua agitur, $x^2 - 6x + 7 = 0$, efficiendo, ut limites radicum istius accedant propius ad se invicem, & unitate tantum a se mutuo differant.

1117. Et si porro, inventis limitibus arctioribus radicum istius æquationis $z^2 - 600z + 70000 = 0$, multiplicentur iterum per 10 radices ejus; habebitur nova adhuc æquatio $u^2 - 6000u + 7000000 = 0$: pro cujus radicibus si limites arctiores, & unitate tantum a se mutuo differentes quærantur; accedent propius ad se invicem limites radicum omnium aliarum æquationum præcedentium. Atque ita semper pergendo, progredi licebit in infinitum, & ad veras radices propositæ æquationis $x^2 - 6x + 7 = 0$ propius semper, ac propius appropinquare.

1118. Cæterum, ut in multiplicandis radicibus adhibuimus numerum denarium, ita ad idem opus quemlibet alium numerum adhibere fas erit. In subsidium autem accersuimus numerum illum; tum, ut continuus limitum accessus per fractiones decimales posset exhiberi; tum etiam, ut calculus paulo facilior evaderet. Nec reticebimus, quod ad multiplicandas continuo radices propositæ æquationis non aliud nos adegit, quam, ut vitaretur difficultas illa, quam secum ferunt fractiones. Nam cæteroquin, adhi-

bitis fractionibus, nulla radicum multiplicatione opus erit; sed in ipsa æquatione, de qua agitur, rem exequi licebit.

VI. *Quomodo ex traditis principiis radices imaginariæ in æquationibus possint investigari.*

1119. Diximus initio hujus capitis, quod ex theoria limitum alia nobis suboritur ratio investigandi radices imaginarias, quæ in æquationibus latent. Unde, priusquam capiti huic finem imponamus, eam hic breviter indicare non gravabimur. Nimirum jam vidimus supra *, quod, si termini alicujus æquationis, omnes radices positivas habentis, multiplicentur, sive per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita, sive per alios quosvis numeros arithmetice proportionales; radices ipsius fiunt limites radicum novæ æquationis.

* Par. 1056 1664.

1120. Inde autem duo deduximus. Primum est, quod, si radices propositæ æquationis sint reales, etiam reales esse debent radices æquationis novæ. Et alterum, quod, si in æquatione nova radices adsint imaginariæ, pariter in æquatione proposita imaginarias radices adesse oportebit. Plane vero ex hoc secundo corollario id, quod quærimus, repeti debet. Jam enim scimus, quando quidem in æquatione secundi gradus utraque radix est imaginaria. Unde, ope ejus corollarii, scire etiam licebit, quando in æquationibus altioris gradus imaginariæ radices reperiuntur.

1121. Esto igitur primum æquatio secundi gra-

gradus $x^2 - px + q = 0$. Sane in hac æquatione radices duæ fiunt imaginariæ, quum ultimus terminus q major est quadrato, quod fit ex coefficiente secundi termini dimidiato. Id vero quum ita sit, facile erit inquirere, quando in æquatione tertii gradus $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radices latent imaginariæ. Multiplicentur namque termini ejus per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; & prodibit æquatio nova secundi gradus $3x^2 - 2px + q = 0$, sive $x^2 - 2px : 3 + q : 3 = 0$. Jamque, si hujus radices duæ sunt imaginariæ, etiam in cubica illa æquatione imaginariæ radices existent.

1122. Et quidem in æquatione secundi gradus $x^2 - 2px : 3 + q : 3 = 0$ utraque radix est imaginaria, ubi ultimus terminus $q : 3$ major est quadrato, quod fit ex semisse coefficientis secundi termini. Quum itaque quadratum istud sit $p^2 : 9$, fiet locus radicibus imaginariis, quotiescumque $q : 3$ major est, quam $p^2 : 9$; sive etiam, quum q major est, quam $p^2 : 3$. Quare etiam in cubica æquatione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radices aderunt imaginariæ, ubi coefficiens tertii termini q major est triente quadrati, quod fit ex coefficiente secundi termini p.

1123. Ulterius, si termini ejusdem æquationis cubicæ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ multiplicentur ordine per numeros istos 0, 1, 2, 3; orietur hæc alia æquatio secundi gradus $-px^2 + 2qx - 3r = 0$, sive $x^2 - 2qx : p + 3r : p = 0$; & ubi hujus radices duæ sunt imaginariæ, etiam in cubica illa æquatione radices aderunt imaginariæ. Plane vero in æquatione ista secundi gradus $x^2 - 2qx : p + 3r : p = 0$ imagi-

naria est utraque radix, ubi $3r:p$ major est, quam $q^2:p^2$; sive etiam, quum pr major est, quam $q^2:3$. Unde etiam in cubica æquatione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ latebunt radices imaginariæ, ubi productum ex ultimo termino r in coefficientem secundi p majus est triente quadrati, quod fit ex coefficiente tertii termini q.

1124. Quæ quum ita sint, liquet, in æquatione cubica $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ fieri locum radicibus imaginariis; primo, quum coefficiens tertii termini major est triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi; & deinde, quum productum ex ultimo termino in coefficientem secundi majus est triente quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii. Unde modo, haud arduum erit investigare, quando in æquatione quarti gradus $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ radices adsunt imaginariæ. Multiplicentur enim termini omnes per numeros dimensionum, quas in iis habet incognita; & orietur æquatio nova tertii gradus $4x^3 - 3px^2 + 2qx - r = 0$, sive $x^3 - 3px^2:4 + qx:2 - r:4 = 0$.

1125. Plane vero in cubica ista æquatione $x^3 - 3px^2:4 + qx:2 - r:4 = 0$ radices adsunt imaginariæ; primo, quum $q:2$ major est, quam $3p^2:16$, sive, quum q major est, quam $3p^2:8$; & secundo, quum $3pr:16$ major est, quam $q^2:12$, sive, quum pr major est, quam $4q^2:9$. Quare etiam in æquatione proposita quarti gradus $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ aderunt radices imaginariæ; primo, quum coefficiens tertii termini major est tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini secundi; & deinde, quum productum ex coefficientibus

se-

secundi, & quarti termini majus est quatuor nonis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini tertii.

1126. Præterea, si termini ejusdem æquationis $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ multiplicentur per numeros istos 0, 1, 2, 3, 4; prodibit hæc alia æquatio tertii gradus $- px^3 + 2qx^2 - 3rx + 4s = 0$, sive $x^3 - 2qx^2 : p + 3rx : p - 4s : p = 0$: in qua radices adsunt imaginariæ, non modo, quum $3r : p$ major est, quam $4q^2 : 3p^2$, sive, quum pr major est, quam $4q^2 : 9$; verum etiam, quum $8qs : p^2$ major est, quam $3r^2 : p^2$, sive, quum qs major est, quam $3r^2 : 8$. Quare in eadem æquatione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ latebunt quoque radices imaginariæ, quum productum ex ultimo termino in coefficientem tertii majus est tribus octavis partibus quadrati, quod fit ex coefficiente termini quarti.

1127. Jam, ubi semel nobis innotuit, quandonam in æquatione quarti gradus $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ radices latent imaginariæ; licebit, eodem artificio, inquirere, quando adsunt radices imaginariæ in æquatione quinti gradus $x^5 - px^4 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$. Atque ita gradatim pergendo, investigatio radicum imaginariarum pro singulis gradibus poterit institui. Quemadmodum autem hac ratione in eandem illam regulam generalem incidimus, quam primus omnium exhibuit Newtonus in sua Arithmetica Universali; ita asserere non vereor, Virum summum hoc potissimum artificio universalem illam regulam excogitasse.

1128. Neque vero difficultatem facere debet, quod hac ratione investigantur radices ima-

ginariæ in iis tantum æquationibus, in quibus termini alternatim signis +, & — afficiuntur, quæque adeo omnes suas radices, continua variatione signorum, positivas ostentant. Jam enim
* ar. 1066 vidimus supra *, nullam dari æquationem, quæ transformationis ope formam istam subire non possit. Plane vero, quum ad hanc ei formam conciliandam subinde transformatur æquatio, radices ipsius dumtaxat incrementum, aut diminutionem patiuntur, numquam vero fieri potest, ut eædem radices fiant ex realibus imaginariæ, vel è contra.

CAPUT V.

Resolutio æquationum litteralium per series infinitas.

1129. METHODUS inveniendi limites, intra quos consistunt radices æquationis, & ad veros earum valores appropinquandi, locum sibi vindicat tantum in æquationibus numericis. Unde, si æquationes propositæ fuerint litterales, necesse est, loco litterarum scribere valores numericos, quo iis possit eadem methodus applicari. Interim æquationes litterales excidunt universalitate sua, quotiescumq; in iis numeri pro litteris substituuntur. Quocirca, pro resolvendis approximatione æquationibus litteralibus, placet, aliam hic methodum exhibere, nimirum ope serierum infinitarum, de quibus fuse actum est libro primo.

I. *Ratio resolvendi æquationes litterales per series infinitas.*

1130. UT æquationes litterales resolvi possint, beneficio serierum infinitarum, assumenda est series aliqua indeterminata, eaque ponenda æqualis incognitæ quantitati, quæ in æquatione continetur. Hujus autem seriei termini duo quidem debent continere; primo nempe potestates unius ex litteris cognitis propositæ æquationis, quæ tales esse debent, ut earum exponentes progressionem constituant arithmeticam; & secundo litteras quasdam indeterminatas pro suis coefficientibus, quas tamen, confusionis vitandæ gratia, assumere oportebit, diversas ab iis, quæ in æquatione proposita continentur.

1131. Hac ratione, si x fuerit incognita æquationis, & m una ex litteris cognitis, quæ in eadem æquatione continentur; supponendum est $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5 + \&c.$, in cujus quidem seriei terminis, præter potestates litteræ m, quarum exponentes constituunt progressionem arithmeticam, continentur etiam litteræ a, b, c, d, e, f, &c., quas suppono diversas esse ab iis, quæ repeiuntur in æquatione proposita. Et notetur hic velim, quod primus seriei terminus am^0 idem valet, ac a. Nam m^0, velut potestas, cujus exponens est zero, tantundem valet, ac unitas; quum sit primus terminus progressionis geometricæ m^0, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5, &c., quæ ab unitate trahit initium suum.

1132.

1132. Nolo autem hic reticere, quod series indeterminata, quam assumere oportet pro valore incognitæ x, non semper ejus formæ esse debet. Quandoque enim supponendum est $x = am^0 + bm^2 + cm^4 + dm^6 + em^8 + fm^{10} +$ &c., quandoque $x = am^0 + bm^3 + cm^6 + dm^9 + em^{12} + fm^{15} +$ &c., & interdum aliæ etiam hypotheses, prout æquationis natura patitur, sunt fingendæ. Illud interim singulis seriebus, quæ assumuntur, commune esse debet, ut exponentes potestatum, per quas termini ejus distinguuntur, constituant semper progressionem arithmeticam: adeo nempe, ut ipsi termini, ratione earundem potestatum, progressionem exhibeant geometricam.

1133. Assumpta serie ista indeterminata pro valore incognitæ x, illud deinde efficiendum est, ut coefficientes terminorum ejusdem seriei determinentur, quo nempe series ipsa determinata evadat. Id autem obtinebitur, si scribatur in ipsa æquatione series illa loco incognitæ x, ejus quadratum loco x^2, ejus cubus loco x^3, atque ita deinceps. Hac enim ratione habebitur æquatio altera infinitarum dimensionum, cujus termini distinguendi sunt, secundum dimensiones illius litteræ, cujus potestates continent termini assumptæ seriei. Unde, si ponatur quisque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, seu nihilo; habebuntur totidem æquationes speciales, quarum ope, facile erit, coefficientes illos determinare.

1134. Demus hujus rei exemplum in æquationibus secundi gradus. Itaque proponatur æquatio $x^2 - 2mx - n^2 = 0$; & oporteat,

va-

valorem incognitæ x per seriem infinitam invenire. Ponatur $x = am^0 + bm^1 + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5 + \&c.$, sive $x = a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5 + \&c.$ Erit ergo $x^2 = a^2 + 2abm + b^2m^2 + 2acm^2 + 2adm^3 + 2bcm^3 + c^2m^4 + 2aem^4 + 2bdm^4 + 2afm^5 + 2bem^5 + 2cdm^5 + \&c.$, & $-2mx = -2am - 2bm^2 - 2cm^3 - 2dm^4 - 2em^5 - \&c.$ Hinc, subrogatis valoribus hisce in æquatione proposita $x^2 - 2mx - n^2 = 0$, distinctisque terminis, secundum dimensiones litteræ m, habebitur loco ejus hæc alia $(a^2 - n^2) + (2ab - 2a)m + (b^2 + 2ac - 2b)m^2 + (2ad + 2bc - 2c)m^3 + (c^2 + 2ae + 2bd - 2d)m^4 + (2af + 2be + 2cd - 2e)m^5 + \&c. = 0$.

1135. Ponatur quisque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, seu nihilo; & habebuntur sequentes æquationes $a^2 - n^2 = 0$, $2ab - 2a = 0$, $b^2 + 2ac - 2b = 0$, $2ad + 2bc - 2c = 0$, $c^2 + 2ae + 2bd - 2d = 0$, $2af + 2be + 2cd - 2e = 0$, &c. Quum autem in prima istarum æquationum habeatur $a^2 - n^2 = 0$; erit $a^2 = n^2$, & $a = n$. Quumque in secunda sit $2ab - 2a = 0$, erit $2ab = 2a$, & $b = 1$. Unde, in tertia æquatione $b^2 + 2ac - 2b = 0$ substitutis valoribus ipsarum a, & b; fiet $2nc - 1 = 0$, & $c = 1 : 2n$. Atque ita quoque invenietur in quarta æquatione $d = 0$, in quinta $e = -1 : 8n^3$, in sexta $f = 0$, atque ita deinceps. Quocirca assumpta series $a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4 + fm^5 + \&c.$ fiet $n + m + m^2 : 2n - m^4 : 8n^3 - \&c.$, evanescentibus terminis, in quibus reperiuntur m^3, m^5, m^7, &c.

1136. Possunt etiam in terminis assumptæ seriei poni potestates litteræ n; sed hoc in casu tollendus est primo ex æquatione secundus terminus, locoque ejus resolvenda hæc alia $y^2 - m^2 - n^2 = 0$. Ad quam item resolvendam poni debet $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10} +$ &c.: ita, ut sit $y^2 = a^2 + 2abn^2 + b^2n^4 + 2acn^4 + 2adn^6 + 2bcn^6 + c^2n^8 + 2aen^8 + 2bdn^8 + 2afn^{10} + 2ben^{10} + 2cdn^{10} +$ &c. Nam, substitutione peracta, habebitur hæc alia æquatio $(a^2 - m^2) + (2ab - 1)n^2 + (b^2 + 2ac)n^4 + (2ad + 2bc)n^6 + (c^2 + 2ae + 2bd)n^8 + (2af + 2be + 2cd)n^{10} +$ &c. $= 0$, cujus terminis nihilo æquatis, fiet $a^2 - m^2 = 0$, $2ab - 1 = 0$, $b^2 + 2ac = 0$, $2ad + 2bc = 0$, $c^2 + 2ae + 2bd = 0$, $2af + 2be + 2cd = 0$, &c.

1137. Ex his autem æquationibus eruitur, primo $a = m$, secundo $b = 1 : 2m$, tertio $c = -1 : 8m^3$, quarto $d = 1 : 16m^5$, quinto $e = -5 : 128m^7$, sexto $f = 7 : 256m^9$, atque ita deinceps. Unde series assumpta pro valore incognitæ y, nimirum $a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10} +$ &c., mutabitur in hanc aliam $m + n^2 : 2m - n^4 : 8m^3 + n^6 : 16m^5 - 5n^8 : 128m^7 + 7n^{10} : 256m^9 -$ &c.: proindeque, quum, propter sublatum secundum terminum, sit $x = y + m$, fiet $x = 2m + n^2 : 2m - n^4 : 8m^3 + n^6 : 16m^5 - 5n^8 : 128m^7 + 7n^{10} : 256m^9 -$ &c. Qua autem fiat ratione, ut; ubi in terminis assumptæ seriei ponuntur potestates litteræ n, deleri debeat secundus terminus, & poni $y = a + bn^2 + cn^4 + dn^6 + en^8 + fn^{10} +$ &c., facili negotio intelligetur, si contrarii periculum fiat.

1138. Quod, si resolvenda proponatur æquatio

tio litteralis secundi gradus $x^2 - 2mx + n^2 = 0$, in qua ultimus terminus afficitur signo $+$; hoc casu necessario in terminis assumendæ seriei poni debent potestates litteræ n; quum, si utique ponerentur in iis potestates litteræ m, primus seriei terminus, omnesque adeo alii prodirent imaginarii. Unde etiam propositæ æquationis resolutio non aliter, beneficio serierum infinitarum, potest obtineri, quam tollendo ex ea secundum terminum. Cæterum istæ eædem difficultates, quæ occurrunt in resolvendis æquationibus litteralibus secundi gradus per series infinitas, quandoque sese offerunt etiam in æquationibus gradus altioris. Quare magna opus est solertia, quum radix alicujus æquationis per seriem infinitam exprimi debet.

1139. Potissimum autem in id incumbendum, ut littera illa, qua distinguendi sunt termini seriei, sit omnium minima: idque, ut series cito fiat convergens, ejusque termini minores semper, ac minores evadant. Aliter enim series, vel erit divergens, vel admodum lente ad valorem quæsitæ quantitatis accedet. Unde sedulo notetur hic velim, quod, etsi in resolvenda æquatione $y^2 - m^2 + n^2 = 0$, in quam vertitur hæc alia $x^2 - 2mx + n^2 = 0$, ubi ex ea deletur secundus terminus, reperiatur semper $y = m - n^2 : 2m - n^4 : 8m^3 - n^6 : 16m^5 - 5n^8 : 128m^7 - 7n^{10} : 256m^9 -$ &c.; attamen series ista tunc demum est convergens, quum n minor est, quam m; hoc est, quum propositæ æquationis radices sunt reales.

II. *Necessitas serierum infinitarum pro æquationibus indeterminatis.*

1140. Methodus resolvendi æquationes per series infinitas usum habet insignem in æquationibus indeterminatis, sive quæ relationem exprimunt inter duas quantitates incognitas. Neque enim in hisce æquationibus potest unius incognitæ valor per limites inveniri. Nam, etsi pro litteris, quantitates cognitas designantibus, numeri substituantur; adhuc tamen duæ supersunt litteræ, quæ duas illas quantitates incognitas exhibent. Itaque, si valor unius incognitæ per approximationem desideretur, necessario valorem illum per seriem infinitorum numero terminorum exprimere oportebit.

1141. In hoc autem casu præstat, seriei terminos per incognitam alteram a se mutuo distinguere. Ut, si fuerint x, & y duæ æquationis incognitæ, & quæratur valor prioris x; distingui poterunt termini seriei per potestates alterius y. Verum id agentes, assumendæ seriei, præter formas, superius memoratas, alias multiplices cogimur largiri. Ut enim nonnullis in casibus poni debet, sive $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 +$ &c., sive $x = ay^0 + by^2 + cy^4 + dy^6 + ey^8 + fy^{10} +$ &c., sive $x = ay^0 + by^3 + cy^6 + dy^9 + ey^{12} + fy^{15} +$ &c.; ita quandoque ponendum erit, vel $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + fy^{11} +$ &c., vel $x = ay + by^4 + cy^7 + dy^{10} + ey^{13} + fy^{16} +$ &c., vel $x = ay + by^5 + cy^9 + dy^{13} + ey^{17} + fy^{21} +$ &c.

1143.

1142. Quin etiam quandoque, loco positivarum, potestates negativas ejus incognitæ adhibere oportebit, & ponere vel $x = ay^0 + by^{-1} + cy^{-2} + dy^{-3} + ey^{-4} + fy^{-5} +$ &c., vel $x = ay^0 + by^{-2} + cy^{-4} + dy^{-6} + ey^{-8} + fy^{-10} +$ &c., vel $x = ay^{-1} + by^{-3} + cy^{-5} + dy^{-7} + ey^{-9} + fy^{-11} +$ &c., vel $x = ay^{-1} + by^{-4} + cy^{-7} + dy^{-10} + ey^{-13} + fy^{-16} +$ &c. Nec deerunt casus, in quibus etiam potestates imperfectæ, tum positivæ, cum negativæ erunt adhibendæ. Verum cujuscumque formæ sit series, quæ assumitur, illud semper requiritur, ut exponentes potestatum, per quas termini ejus distinguuntur, constituant progressionem arithmeticam.

1143. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, & inveniendus sit valor incognitæ x per seriem infinitam, cujus terminos distinguat incognita altera y. Fiat $x = a + by^2 + cy^4 + dy^6 + ey^8 + fy^{10} +$ &c. Et, quadratis partibus, erit $x^2 = a^2 + 2aby^2 + b^2y^4 + 2acy^4 + 2ady^6 + 2bcy^6 + c^2y^8 + 2aey^8 + 2bdy^8 + 2afy^{10} + 2bey^{10} + 2cdy^{10} +$ &c. Hinc, subrogato in æquatione proposita loco x^2 valore isto, distinctisque terminis, secundum dimensiones incognitæ y, habebitur loco ejus hæc alia $(a^2 - a^2) + (2ab + 1)y^2 + (b^2 + 2ac)y^4 + (2ad + 2bc)y^6 + (c^2 + 2ae + 2bd)y^8 + (2af + 2be + 2cd)y^{10} +$ &c. $= 0$.

1144. Ponatur modo quisque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, & fiet $a^2 - a^2 = 0$, $2ab + 1 = 0$, $b^2 + 2ac = 0$, $2ad + 2bc = 0$, $c^2 + 2ae + 2bd = 0$, $2af + 2be + 2cd = 0$, &c. Harum autem æquationum prima

dat

dat $a = n$, secunda $b = -1 : 2n$, tertia $c = 1 : 8n^3$, quarta $d = -1 : 16n^5$, quinta $e = 5 : 128n^7$, sexta $f = -7 : 256n^9$, atque ita deinceps. Unde, sicuti erat $x = a + by^2$ $cy^4 + dy^6 + ey^8 + fy^{10} +$ &c.; ita, substitutis loco $a, b, c, d, e, f,$ &c. valoribus inventis, fiet $x = n - y^2 : 2n + y^4 : 8n^3 - y^6 : 16n^5 + 5y^8 : 128n^7 - 7y^{10} : 256n^9 +$ &c.

1145. Hujusmodi porro seriem convergentem esse, vel exinde liquere potest, qnod in æquatione proposita $x^2 + y^2 - n^2 = 0$ valor ipsius x tunc demum realis deprehenditur, ubi y minor est, quam n. Hinc, siquidem habetur $x^2 - y^2 - n^2 = 0$, ubi x semper valorem realem admittit, distinguendi sunt duo casus; prior est, quum y est minor, quam n; alter, quum vicissim est major. In priore casu licebit, rursus assumere $x = a + by^2 + cy^4 + dy^6 + ey^8 + fy^{10}$ $+$ &c. Verum in secundo casu omnino supponendum est $x = ay + by^{-1} + cy^{-3} + dy^{-5} + ey^{-7} + fy^{-9} +$ &c.

1146. Quum enim, quadrando, habeatur $x^2 = a^2y^2 + 2ab + b^2y^{-2} + 2acy^{-2} + 2ady^{-4} + 2bcy^{-4} + c^2y^{-6} + 2aey^{-6} + 2bdy^{-6} + 2afy^{-8} + 2bey^{-8} + 2cdy^{-8} +$ &c.; per substitutionem æquatio vertetur in hanc aliam $(a^2 - 1)y^2 + (2ab - n^2) + (b^2 + 2ac)y^{-2} + (2ad + 2bc)y^{-4} + (c^2 + 2ae + 2bd)y^{-6} + (2af + 2be + 2cd)y^{-8} +$ &c. Quare, æquatis zero singulis terminis, erit $a^2 - 1 = 0$, $2ab - n^2 = 0$, $b^2 + 2ac = 0$, $2ad + 2bc = 0$, $c^2 + 2ae + 2bd = 0$, $2af + 2be + 2cd = 0$, &c.

1147. Jam ex his æquationibus eruitur primo $a = 1$, secundo $b = n^2 : 2$; tertio $c = -$

$n^4:$

$n^4 : 8$; quarto $d = n^6 : 16$, quinto $e = - 3n^8 : 128$, sexto $f = 5n^{10} : 256$, atque ita deinceps. Unde, ficuti erat $x = ay + by^{-1} + cy^{-3} + dy^{-5} + ey^{-7} + fy^{-9} + \&c.$; ita, per substitutionem horum valorum, fiet $x = y + n^2y^{-1} : 2 - n^4y^{-3} : 8 + n^6y^{-5} : 16 - 3n^8y^{-7} : 128 + 5n^{10}y^{-9} : 256 - \&c.$, five etiam $x = y + n^2 : 2y - n^4 : 8y^3 + n^6 : 16y^5 - 3n^8 : 128y^7 + 5n^{10} : 256y^9 - \&c.$

1148. Quod si æquatio sit $x^2 - y^2 + n^2 = 0$, in ea valor incognitæ x non aliter realis esse potest, nisi in hypothesi, quod y major est, quam m. Unde, ad inveniendum valorem illum semper quidem assumi debet $x = ay + by^{-1} + cy^{-3} + dy^{-5} + ey^{-7} + fy^{-9} + \&c.$ Quumque in hoc casu fiat $a = 1$, $b = - n^2:2$, $c = - n^4 : 8$, $d = - n^6 : 16$, $e = - 3n^8:128$, $f = - 5n^{10} : 256$, atque ita deinceps; erit $x = y - n^2y^{-1} : 2 - n^4y^{-3} : 8 - n^6y^{-5} : 16 - 3n^8y^{-7} : 128 - 5n^{10}y^{-9} : 256 - \&c.$, five $x = y - n^2 : 2y - n^4 : 8y^3 - n^6 : 16y^5 - 3n^8 : 128y^7 - 5n^{10} : 256y^9 - \&c.$

1149. Proponatur ulterius æquatio $x^3 - y^3 + nxy = 0$, & inveniendus sit valor incognitæ x per seriem infinitam, cujus terminos distinguat incognita altera y. Ponatur $x = ay + b + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3} + \&c.$ Et, ficuti fiet $nxy = nay^2 + nby + nc + ndy^{-1} + \&c.$, ita erit $x^3 = a^3y^3 + 3a^2by^2 + 3ab^2y + 3a^2cy + b^3 + 6abc + 3a^2d + 3b^2cy^{-1} + 3ac^2y^{-1} + 6abdy^{-1} + 3a^2ey^{-1} + \&c.$ Unde, per debitas substitutiones, æquatio proposita $x^3 - y^3 + nxy = 0$ vertetur in hanc aliam $(a^3 - 1)y^3 + (3a^2b + na)y^2 + (3ab^2 + 3a^2c + nb)y + (b^3 + 6abc + 3a^2d + nc)$

$+ nc) + (3b^2c + 3ac^2 + 6abd + 3a^2e + nd)y^{-1}$ $+$ &c. $= 0$.

1150. Æquatis autem zero singulis terminis ejus, fiet $a^3 - 1 = 0$, $3a^2b + na = 0$, $3ab^2 + 3a^2c + nb = 0$, $b^3 + 6abc + 3a^2d + nc = 0$, $3b^2c + 3ac^2 + 6abd + 3a^2e + nd = 0$, &c. Quumque ex his æquationibus eruatur primo $a = 1$, secundo $b = -n : 3$, tertio $c = -n^2 : 3$, quarto $d = 55n^3 : 81$, quinto $e = 64n^4 : 243$, atque ita deinceps; fiet, per substitutionem horum valorum, $x = y - n : 3 - n^2y^{-1} : 3 + 55n^3y^{-2} : 81 + 64n^4y^{-3} : 243 -$ &c., sive etiam $x = y - n : 3 - n^2 : 3y + 55n^3 : 81y^2 + 64n^4 : 243y^3 -$ &c.

III. *Necessitas earundem æquationum in resolutione nonnullorum problematum.*

1151. Methodum resolvendi æquationes per series infinitas usum eximium habere in iis æquationibus, quæ exprimunt relationem inter duas quantitates incognitas; jam quidem adnotavimus. Nunc autem subjungimus, nonnulla adesse problemata, in quibus relatio, quam habet una quantitas ad aliam, non aliter algebraice definiri potest, quam per æquationem infinitarum dimensionum. Ut, si quæratur relatio, quam quilibet arcus circularis habet ad suam tangentem, voceturque x arcus, t tangens, & r circuli radius; fiet æquatio $x = t - t^3 : 3r^2 + t^5 : 5r^4 - t^7 : 7r^6 + t^9 : 9r^8 -$ &c. Pariterque, si scire cupias relationem, quam quilibet arcus circuli habet ad suum sinum, iisdemque positis, vocetur s

sinus

nus, arcui correspondens; æquatio erit $x = + y^3 : 6r^2 + 3y^5 : 40r^4 + 5y^7 : 112r^6 + 35y^9 : 1152r^8 +$ &c.

1152. Ut id plenius constet, simulque me-hodum resolvendi hujusmodi problemata hic reviter indicemus; esto circulus AMB, cujus entrum sit punctum C. Capiatur in eo arcus uilibet AM, & inquirenda sit ratio, quam rcus iste habet ad suam tangentem AT. In-elligatur tangens AT divisa in infinitas parti-ulas æquales Aa, ab, bc, &c. Jamque, si quæ-ibet harum particularum referat unitatem, exhi-ebunt Aa, Ab, Ac, &c. numeros naturales, ab nitate se consequentes. Referat autem inde-inite Ae quemcumque numerorum naturalium n. Et, descripto centro C, intervalloque Cd rcu df; hic, velut indefinite parvus, tanquam xigua recta, ipsi Ce perpendicularis, poterit onsiderari: proindeque, quum æquiangula iant triangula duo efd, eAC; erit, ut df ad de, ta AC ad Ce. FIG. 35.

1153. Quia autem, ob sectores similes nCo Cf, in eadem ratione rectarum AC, Ce est etiam o ad df; erit, ut no ad de, ita AC quadratum d Ce quadratum; hoc est, ut no ad 1, ita r^2 ad $r^2 + m^2$: proindeque fiet $no = r^2 : (r^2 + m^2)$. Sed actio ista, conversa in seriem, evadit $1 - m^2 : r^2 + m^4 : r^4 - m^6 : r^6 + m^8 : r^8 -$ &c. Quare rit $no = 1 - m^2 : r^2 + m^4 : r^4 - m^6 : r^6 + m^8 : r^8 -$ &c.; & propterea, quia æquatio ista btinet pro singulis tangentibus, quæ referunt dine numeros naturales, designatos indefinite r m; fiet arcus totus AM æqualis eidem seriei $- m^2 : r^2 + m^4 : r^4 - m^6 : r^6 + m^8 : r^8 -$

 &c.,

&c., ita quidem infinities sumptæ, ut in infinitis iis vicibus m successive omnes numeros naturales exhibeat.

1154. Id vero quum ita sit, liquet, arcum AM æqualem esse summæ unitatum omnium, minus summa omnium m^2 applicata ad quadratum radii, plus summa omnium m^4 applicata ad quadrato-quadratum radii, atque ita deinceps. Unde quia exhibentibus Aa, Ab, Ac, &c. numeros naturales, ab unitate se consequentes, fit AT = maximus eorundem numerorum; erit * t summa omnium unitatum, $t^3 : 3$ summa omnium m^2, $t^5 : 5$ summa omnium m^4, $t^7 : 7$ summa omnium m^6, atque ita deinceps: proindeque erit arcus AM $= t - t^3 : 3r^2 + t^5 : 5r^4 - t^7 : 7r^6 + t^9 : 9r^8 -$ &c.; & consequenter, vocando x eundem arcum, fiet æquatio, ut supra *, $x = t - t^3 : 3r^2 + t^5 : 5r^4 - t^7 : 7r^6 + t^9 : 9r^8 -$ &c.

*lib. 1. art. 559. 600.

*ar. 1151

1155. In eodem circulo AMB, centrum habente punctum C, capiatur rursus arcus quilibet AM, & inquirenda sit ratio, quam arcus iste habet ad suum sinum MN. Intelligatur similiter sinus MN divisus in infinitas particulas æquales Na, ab, bc, &c. Et rursus, si quælibet harum particularum referat unitatem, exhibebunt Na, Nb, Nc, &c. numeros naturales, ab unitate se consequentes. Referat autem indefinite Ne quemcumque numerorum naturalium m. Jamque, si ipsi CA ductæ concipiantur parallelæ dn, eo; arcus no, velut indefinite parvus, tamquam portio rectæ, circulum tangentis in n, poterit considerari.

FIG. 36.

1156. Hinc demisso super CA perpendiculo or, æquiangula erunt triangula duo nor, oC

proin-

roindeque erit, ut no ad ro, sive de, ita Co ad os; hoc est, ut no ad 1, ita r ad $\surd(r^2 - m^2)$: propterea fiet $no = r : \surd(r^2 - m^2)$. Sed fractio ista, conversa in seriem, evadit $1 + m^2 : 2r^2 + 3m^4 : 8r^4 + 5m^6 : 16r^6 + 35m^8 : 128r^8 +$ &c. Quare erit $no = 1 + m^2 : 2r^2 + 3m^4 : 8r^4 + 5m^6 : 16r^6 + 35m^8 : 128r^8 +$ &c.; adeoque, cum æquatio ista obtineat pro singulis sinibus, qui referunt ordine numeros naturales, designatos indefinite per m; fiet arcus totus AM æqualis eidem seriei $1 + m^2 : 2r^2 + 3m^4 : 8r^4 + 5m^6 : 16r^6 + 35m^8 : 128r^8 +$ &c., ita quidem infinities sumptæ, ut in infinitis iis vicibus m successive omnes numeros naturales exhibeat.

1157. Erit itaque arcus AM æqualis summæ unitatum omnium, plus summa omnium m^2 applicata ad quadratum radii duplicatum, hoc est ad $2r^2$, plus summa omnium m^4 applicata ad $8r^4 : 3$, atque ita deinceps. Unde, quia, exhibentibus Na, Nb, Nc, &c. numeros naturales, ab unitate se consequentes, fit NM $= y$ maximus eorundem numerorum; erit * y summa omnium unitatum, $y^3 : 3$ summa omnium m^2, $y^5 : 5$ summa omnium m^4, $y^7 : 7$ summa omnium m^6, atque ita continuo: proindeque erit arcus AM $= y + y^3 : 6r^2 + 3y^5 : 40r^4 + 5y^7 : 112r^6 + 35y^9 : 1152r^8 +$ &c.; & consequenter, vocando x eundem arcum, fiet æquatio, ut supra *, $x = y + y^3 : 6r^2 + 3y^5 : 40r^4 + 5y^7 : 112r^6 + 35y^9 : 1152r^8 +$ &c.

* lib. 1. art. 599. 600.

* ar. 1151

IV. *Quid per regreſſum ſerierum intelligatur, & quomodo poſſit obtineri.*

1158. QUum valor unius incognitæ exprimitur per ſeriem infinitam, cujus termini incognita alia diſtinguuntur a ſe mutuo; poteſt viciſſim valor alterius hujus incognitæ deſignari per aliam ſeriem infinitam, cujus terminos diſtinguat a ſe invicem incognita prior. Sic in iſta æquatione $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.$ valor incognitæ x deſignatur per ſeriem infinitam, cujus termini diſtinguuntur incognita y; ſed alia poteſt infinita ſeries inveniri, cujus terminos diſtinguat incognita x, quæque ſit valor incognitæ y.

1159. Alterius hujus ſeriei inventio illud eſt, quod ſerierum regreſſus paſſim appellatur. Et hujuſmodi regreſſus ſerierum primus omnium præbuit exempla duo Iſaac Newtonus in quadam epiſtola, miſſa ad Dominum Oldenburgium die vigeſima quarta octobris anni 1676. Si enim ſit $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.$, ait eſſe viciſſim $y = x : a - bx^2 : a^3 + (2b^2 - ac)x^3 : a^5 + (5abc - 5b^3 - a^2d)x^4 : a^7 + (3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e)x^5 : a^9 +$ &c. Et ſimiliter, ſi fuerit $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$, fatetur, eſſe per contrarium $y = x : a - bx^3 : a^4 + (3b^2 - ac)x^5 : a^7 + (8abc - a^2d - 12b^3)x^7 : a^{10} + (55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 15a^2c^2 - a^3e)x^9 : a^{13} + \&c.$

1160. Duo iſta Newtoni exempla poſſunt in caſibus ſpecialibus, velut canones generales adhiberi. Si enim proponatur æquatio ſpecia-

cialis $x = y - y^2 : 2 + y^3 : 3 - y^4 : 4 + y^5 : 5 +$ &c., habebit ista eandem formam cum prima aequatione generali $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$ &c.; adeoque, quum fiat $a = 1$, $b = -1 : 2$, $c = 1 : 3$, $d = -1 : 4$, $e = 1 : 5$, &c.; reperietur per canonem primum $y = x + x^2 : 2 + x^3 : 6 + x^4 : 24 + x^5 : 120 +$ &c. Et similiter, si aequatio specialis fuerit $x = y + y^3 : 6 + 3y^5 : 40 + 5y^7 : 112 +$ &c., haec erit ejusdem formae cum secunda aequatione generali $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 +$ &c.: proindeque, quum fiat $a = 1$, $b = 1 : 6$, $c = 3 : 40$, $d = 5 : 112$, &c.; erit, per canonem secundum, $y = x - x^3 : 6 + x^5 : 120 - x^7 : 5040 +$ &c.

1161. Jam regressus iste serierum obtineri potest eadem omnino methodo, qua radix cujuscumque aequationis finitae per seriem infinitam exhibetur. Proponatur, exempli causa, prima aequatio generalis Newtoniana $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$ &c., & inveniendus sit valor incognitae y per seriem infinitam, cujus terminos distinguat incognita x. Assumatur series indeterminata $fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + lx^5 +$ &c., eaque ponatur aequalis incognitae y: ita nempe, ut habeatur $y = fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + lx^5 +$ &c.

1162. Elevando igitur successive ad potestates omnes utramque partem hujus aequationis, erit primo $y^2 = f^2x^2 + 2fgx^3 + g^2x^4 + 2fhx^4 + 2fkx^5 + 2ghx^5 +$ &c., secundo $y^3 = f^3x^3 + 3f^2gx^4 + 3fg^2x^5 + 3f^2hx^5 +$ &c., tertio $y^4 = f^4x^4 + 4f^3gx^5 +$ &c., quarto $y^5 = f^5x^5 +$ &c., atque ita deinceps. Hinc, subrogatis valoribus potestatum incognitae y in aequatione, de qua agi-

agitur, $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$ &c. distinctisque terminis, secundum dimensiones incognitæ x, habebitur loco ejus hæc alia $o = (af - 1)x + (ag + bf^2)x^2 + (ah + 2bfg + cf^3)x^3 + (ak + bg^2 + 2bfh + 3cf^2g + df^4)x^4 + (al + 2bfk + 2bgh + 3cfg^2 + 3cf^2h + 4df^3g + ef^5)x^5$ + &c.

1163. Ponatur modo quisque terminus novæ hujus æquationis æqualis zero, seu nihilo; & habebuntur sequentes æquationes $af - 1 = o$, $ag + bf^2 = o$, $ah + 2bfg + cf^3 = o$, $ak + bg^2 + 2bfh + 3cf^2g + df^4 = o$, $al + 2bfk + 2bgh + 3cfg^2 + 3cf^2h + 4df^3g + ef^5 = o$, &c. Quumque eruatur ex harum æquationum prima $f = 1 : a$, ex secunda $g = -b : a^3$, ex tertia $h = (2b^2 - ac) : a^5$, ex quarta $k = (5abc - 5b^3 - a^2d) : a^7$, ex quinta $l = (3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e) : a^9$, &c.; assumpta series indeterminata $fx + gx^2 + hx^3 + kx^4 + lx^5$ + &c. vertetur in hanc aliam $x : a - bx^2 : a^3 + (2b^2 - ac)x^3 : a^5 + (5abc - 5b^3 - a^2d)x^4 : a^7 + (3a^2c^2 - 21ab^2c + 6a^2bd + 14b^4 - a^3e)x^5 : a^9$ + &c.; adeoque huic seriei æqualis erit incognita y.

1164. Proponatur ulterius secunda æquatio generalis Newtoniana $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$ + &c. Et oporteat similiter, invenire valorem incognitæ y per seriem infinitam, cujus terminos distinguat incognita x. Ponatur $y = fx + gx^3 + hx^5 + kx^7 + lx^9$ + &c. Et, per formationem potestatum, erit primo $y^3 = f^3x^3 + 3f^2gx^5 + 3fg^2x^7 + 3f^2hx^7 + g^3x^9 + 6fghx^9$ + &c., secundo $y^5 = f^5x^5 + 5f^4gx^7 + 10f^3g^2x^9 + 5f^4hx^9$ + &c., tertio $y^7 = f^7x^7$

$7f^6gx^9$

$7f^6gx^9 + \&c.$, quarto $y^9 = f^9x^9 + \&c.$, atque ita deinceps.

1165. Hinc in æquatione, de qua agitur, $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$ subrogatis loco poteſtatum incognitæ y valoribus ſuis, diſtinctiſque terminis, ſecundum dimenſiones incognitæ x; orietur loco ejus hæc alia $0 = (af - 1)x + (ag + bf^3)x^3 + (ah + 3bf^2g + cf^5)x^5 + (ak + 3bfg^2 + 3bf^2h + 5cf^4g + df^7)x^7 + (al + bg^3 + 6bfgh + 10cf^3g^2 + 5cf^4h + 7df^6g + ef^9)x^9 + \&c.$, in qua ſi quiſque terminus ponatur æqualis zero, ſeu nihilo, habebuntur ſequentes æquationes $af - 1 = 0$, $ag + bf^3 = 0$, $ah + 3bf^2g + cf^5 = 0$, $ak + 3bfg^2 + 3bf^2h + 5cf^4g + df^7 = 0$, $al + bg^3 + 6bfgh + 10cf^3g^2 + 5cf^4h + 7cf^6g + ef^9 = 0$, &c.

1166. Jam ex prima harum æquationum eruitur $f = 1 : a$, ex ſecunda $g = - b : a^4$, ex tertia $h = (3b^2 - ac) : a^7$, ex quarta $k = (8abc - a^2d - 12b^3) : a^{10}$, ex quinta $l = (55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e) : a^{13}$, atque ita deinceps. Unde, ſicuti erat $y = fx + gx^3 + hx^5 + kx^7 + lx^9 + \&c.$; ita, ſubſtitutis loco f, g, h, k, l, &c. valoribus inventis, fiet $y = x : a - bx^3 : a^4 + (3b^2 - ac)x^5 : a^7 + (8abc - a^2d - 12b^3)x^7 : a^{10} + (55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3e)x^9 : a^{13} + \&c.$, omnino, ut in laudata Newtoni epiſtola exhibetur.

V. *Reſolutio æquationum tertii, & quarti gradus per radicales quadratas.*

1167. PErtinet ad hunc locum reſolutio æquationum tertii, & quarti

ti gradus per radicales quadratas : ut quæ, non aliter, quam per feriem infinitorum numero terminorum, obtinetur. Eam exhibuit primus omnium Jacobus Bernoullius in tractatu fuo de feriebus infinitis ; fed artificium, quo in illam incidit, minime nobis aperuit. Plene autem eandem expofuit Hofpitalius in opere fuo analytico de fectionibus conicis. Unde, quæ de hujufmodi æquationum refolutione hic breviter dicenda nobis erunt, ex eo potiffimum mutuabimus.

1168. Ut ergo ab æquationibus cubicis ordiamur, proponatur primum æquatio $x^3 + qx - r = 0$. Et, quemadmodum tranfponendo habetur $x^3 + qx = r$; ita, multiplicando per x, & addendo $q^2 : 4$ ad utramque æquationis partem, fiet $x^4 + qx^2 + q^2 : 4 = q^2 : 4 + rx$. Hinc, per extractionem quadratæ radicis, erit $x^2 + q : 2 = \surd(q^2 : 4 + rx)$, five etiam $x^2 = -q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rx)$. Et ex nova ifta æquatione extracta rurfus radice quadrata, erit tandem $x = \surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rx)]$.

1169. Efto nunc a major, quam x. Dico, fore $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + ra)]$ minorem quidem a, majorem vero x. Primo enim, quum fit $x^3 + qx = r$, & a major, quam x; erit $a^3 + qa$ major, quam r : proindeque, quum fiat $a^4 + qa^2 + q^2 : 4$ major, quam $q^2 : 4 + ra$; erit $a^2 + q : 2$ major, quam $\surd(q^2 : 4 + ra)$; & confequenter a major, quam $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + ra)]$. Deinde, quum fit a major, quam x: erit $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + ra)]$ major, quam $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rx)]$; adeoque, quia habetur * $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rx)] = x$;

* ar. 1168

erit

erit $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]$ major, quam x.

1170. Id vero quum ita sit, si ponatur $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]=b$; erit, ob eandem rationem, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]$ minor, quam b, & major, quam x. Et eodem argumento, si fiat $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]=c$; erit $\surd[(-q:2+\surd(q^2:4+rc)]$ minor, quam c, & major, quam x. Unde, si series $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]$, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]$, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rc)]$ eadem lege in infinitum continuetur: omnino necesse est, ut infinitesimus ejus terminus juxtum valorem exhibeat incognitæ x; quum termini ipsius seriei ad valorem illum continuo accedant.

1171. Quod si a capiatur minor, quam x; tunc, ratiocinio non dissimili, ostendetur, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]$ majorem esse, quam a, & minorem, quam x. Unde, ponendo $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]=b$, fiet etiam $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]$ major, quam b, & minor, quam x. Atque ita quoque, si ponatur $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]=c$, erit $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rc)]$ major, quam c, & minor, quam x. Quocirca, continuata serie $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+ra)]$, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rb)]$, $\surd[-q:2+\surd(q^2:4+rc)]$ eadem lege in infinitum: plane oportebit, ut terminus ejus infinitesimus exhibeat juxtum valorem incognitæ x.

1172. Proponatur secundo æquatio $x^3-qx-r=0$; & resolutione eadem methodo instituta prodibit $x=\surd[q:2+\surd(q^2:4+rx)]$. Esto deinde a major, quam x. Et, quia habetur $x^2=q+r:x$; erit x^2 major, quam $q+r:a$

$r : a$; & a^2 multo major, quam $q + r : a$. Unde, quum fiat $a^3 - qa$ major, quam r; erit a major, quam $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + ra)}]}$. Quia vero a major eſt, quam x; erit $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + ra)}]}$ major, quam $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + rx)}]}$: proindeque, quum ſit $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + rx)}]} = x$; erit $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + ra)}]}$ major etiam, quam x.

1173. Non diſſimiliter oſtendetur, $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + ra)}]}$ fore majorem quidem a, minorem vero x, ubi a minor eſt, quam x. Quare, ſi ſeries concipiatur $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + ra)}]}$, $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + rb)}]}$, $\sqrt{[q : 2 + \sqrt{(q^2 : 4 + rc)}]}$, in qua litteræ b, c, &c. referant ſemper terminos præcedentes; ejus termini magis ſemper, ac magis accedent ad valorem incognitæ x. Unde omnino neceſſe eſt, ut ejuſdem ſeriei terminus infiniteſimus juxtum valorem exhibeat incognitæ x.

1174. Notetur autem hoc loco velim, quod, etſi incognita x in æquatione $x^3 - qx - r = 0$ tres poſſit valores reales habere, unum poſitivum, & duos negativos; attamen, hac methodo, nonniſi valor poſitivus detegitur: quo tamen detecto, facile erit, diviſionis ope, alios duos negativos eruere. Cæterum, ſi æquatio fuerit $x^3 - qx + r = 0$; tunc reſolvenda erit loco ejus hæc alia $x^3 - qx - r = 0$. Nam radix poſitiva iſtius dabit negativam illius, & viciſſim duæ hujus radices negativæ fient illius radices poſitivæ. Neque aliter invenire licebit radicem negativam iſtius $x^3 + qx + r = 0$: nimirum quærendo radicem poſitivam prioris æquationis $x^3 + qx - r = 0$.

1175. Methodo non dissimili obtineri poterit per radicales quadratas resolutio æquationum quatuor dimensionum. Proponatur, exempli gratia, æquatio $x^4 + qx^2 - rx + s = 0$. Hæc, sicuti transpositione evadit $x^4 + qx^2 = rx - s$; ita, addendo ad utramque partem $q^2:4$, fiet $x^4 + qx^2 + q^2 : 4 = q^2 : 4 + rx - s$. Unde, extractione quadratæ radicis, erit $x^2 + q : 2 = \surd(q^2 : 4 + rx - s)$, sive etiam $x^2 = -q:2 + \surd(q^2 : 4 + rx - s)$. Et rursus hinc inde quadratam radicem extrahendo, erit demum $x = \surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rx - s)]$.

1176. Perinde autem, ac in æquationibus cubicis factum est, ostendemus, fore $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + ra - r)]$ minorem quidem a, majorem vero x, ubi a major est, quam x; & per contrarium majorem quidem a, minorem vero x, ubi a minor est, quam x. Quare, si concipiatur series $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + ra - s)]$, $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rb - s)]$, $\surd[-q : 2 + \surd(q^2 : 4 + rc - s)]$, &c., in qua litteræ b, c, &c. referant terminos præcedentes; seriei hujus termini magis semper, ac magis accedent ad valorem incognitæ x: & ea propter ejus terminus infinitesimus juxtum valorem ipsius x nobis exhibebit.

VI. *Methodus specialis pro resolvendis approximatione æquationibus puris.*

1177. Quum æquationes, quæ resolvendæ proponuntur, sunt puræ, omnibusque terminis intermediis carent, eo res redit, ut ex ultimo æquationis termino radix

dix extrahatur, ab ipso æquationis gradu denominata: quæ, siquidem inveniri nequeat exacte, haberi poterit per approximationem, convertendo in seriem infinitam quantitatem radicalem, quæ ex ea radicis extractione suboritur, ope ejus methodi, quam priore libro docuimus; quum non aliud fieri debeat, quo methodus illa procedat, quam, ut quantitas, quæ sub signo radicali reperitur, composita reddatur.

1178. Interim Edmundus Hallejus, eximius non minus Astronomus, quam Geometra, occasione nonnullarum formularum, quas protulit Dominus de Lagney, Mathematicus Parisiensis, pro extrahenda radice cubica, incidit in formularum methodum quandam generalem, pro quavis potestate satis concinnam, quarum ope radices deteguntur, adeo ad veras appropinquantes, ut seriebus infinitis nihil cedere videantur. Unde, ne aliquid omittamus, quod scitu sit dignum, ad rem fore judicamus, methodi hujus brevem hoc loco ideam exhibere.

1179. Primo autem afferemus formulas ipsas, quas protulit Dominus de Lagney, pro extrahenda radice cubica. Nimirum, si a^3 sit maximus cubus, qui continetur in quantitate proposita, & $2b$ id, quod remanet, cubo illo subducto; radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$ cadet inter $a + 2ab : (3a^3 + 2b)$, & $a : 2 + \sqrt{(a^2 : 4 + 2b : 3a)}$: adeo, ut ex duabus formulis, limites exhibentibus, una, quæ peccat in defectu, & non tam ad veram radicem accedit, sit omnino rationalis; altera, quæ peccat in excessu, & propius ad scopum collimat, sit partim rationalis, partim radicalis.

1180. Utramque harum formularum ex ipsa cubi genesi mire deduxit Hallejus. Posito enim, quod $a + x$ sit radix cubica totius quantitatis $a^3 + 2b$; erit $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + 2b$, sive etiam $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$. Et quoniam, ex hypothesi, a^3 est maximus cubus, qui continetur in quantitate $a^3 + 2b$; erit x multo minor, quam a: proindeque in æquatione $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$, respectu ipsius $3a^2x$, negligi potest, non modo terminus x^3, verum etiam terminus $3ax^2$.

1181. Negligatur itaque primum uterque istorum terminorum. Et, quum æquatio evadat $3a^2x = 2b$, fiet $x = 2b : 3a^2$. Negligatur deinde dumtaxat tetminus x^3. Quumque æquatio fiat $3a^2x + 3ax^2 = 2b$; erit $x = 2b : (3a^2 + 3ax)$. Ponatur modo in denominatore hujus fractionis loco x alter ille valor $2b : 3a^2$; & fiet $x = 2b : (3a^2 + 2b : a)$, sive $x = 2ab : (3a^3 + 2b)$. Quare radix cubica quantitatis $a^3 + 2b$, sicuti erat designata per $a + x$, sic fiet $a + 2ab : (3a^3 + 2b)$.

1182. Ex eodem fonte derivatur quoque formula altera, partim rationalis, partim radicalis. Iisdem namque positis, invenietur, ut antea *, $3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 2b$: proindeque, neglecto ob parvitatem termino x^3, erit $3a^2x + 3ax^2 = 2b$, sive $x^2 + ax = 2b : 3a$. Hinc, addito utrinque $a^2 : 4$, & extracta hinc inde quadrata radice, fiet $x + a : 2 = \sqrt{(a^2 : 4 + 2b : 3a)}$. Unde radix cubica ejusdem quantitatis $a^3 + 2b$, designata per $a + x$, erit $a : 2 + \sqrt{(a^2 : 4 + 2b : 3a)}$.

* n. 1180

1183. Jam, eodem hoc artificio, exhibuit idem

idem Hallejus binas formulas pro unaquaque potestate. Ut, si quæstio sit de radice quadrato-quadrata, esto a^4 maximum quadrato-quadratum, quod continetur in quantitate proposita, & $2b$ id, quod ejus subductione remanet. Quemadmodum ergo est $a^4 + 2b$ quantitas proposita; ita, si $a + x$ referat radicem ejus, erit $4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 = 2b$. Plane vero, sicuti neglectis terminis $6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$, fit $4a^3x = 2b$, sive $x = 2b : 4a^3$; ita, si negligantur soli termini $4ax^3 + x^4$, erit $4a^3x + 6a^2x^2 = 2b$.

1184. Hinc autem eruitur primo $x = 2b : (4a^3 + 6a^2x)$: proindeque, posito in denominatore hujus fractionis loco x altero illo valore, habebitur $x = 2ab : (4a^4 + 3b)$; adeoque erit $a + x = a + 2ab : (4a^4 + 3b)$, quæ est formularum una. Quumque exinde eruatur etiam $x^2 + 2ax : 3 = b : 3a^2$, erit $x + a : 3 = \surd(a^2 : 9 + b : 3a^2)$; & consequenter $x + a = 2a : 3 + \surd(a^2 : 9 + b : 3a^2)$, quæ est formularum altera pro radice quæsita.

1185. Eadem igitur ratione, si $a^5 + 2b$ sit quantitas, unde extrahenda sit radix quinta; cadet radix ista inter $a + 2ab : (5a^5 + 4b)$, & $3a : 4 + \surd(a^2 : 16 + b : 5a^3)$. Et generaliter, si quantitas sit $a^m + 2b$, radix ejus, ab m denominata, cadet inter $a + 2ab : [ma^m + (m - 1)b]$, & $(m - 2)a : (m - 1) + \surd[a^2 : (m - 1)^2 + 4b : (m^2 - m) a^{m-2}]$, ponendo semper, quod a^m sit maxima potestas ejus ordinis, quæ in quantitate $a^m + 2b$ continetur.

FINIS LIBRI SECUNDI.

INDEX

Sectionum, Capitum, & Paragraphorum, quæ in secundo hoc Libro continentur.

II.

FINIS INDICIS.

ER-

ERRATA.

Pag.	lin.		leg.
8.	19.	qualem	qualis
19.	23.	ANE, ACG	DNE, CDG
	24.	ANM, ACH	DNM, DCH
54.	32.	$(ag^2 - cf^2)$	$(ag^2 + cf^2)$
61.	19.	æquicrure	æquilaterum
203.	29.	major	minor
255.	32.	rectus	semirectus
256.	4.	rectus	semirectus
341.	1.2) 3.6)	ad^2	a^2d
350.	33.	cubus ejus	cubus sui trientis
378.	21.	y^2	x^2
390.	22.	$9qx^2$	qx^2
403.	24.	y^3	ry^3
	25.	z	y^3
421.	9.	c^4	$c^4 = 0$
447.	34.	$3p^2$	$6p^2$

MONITUM.

QUemadmodum quadratum ex radice binomia constat ex tribus terminis, & id, quod oritur ex extremorum multiplicatione, est æquale quadrato, quod fit ex termino medio dimidiato; ita diximus articulo 988, proprietatem istam non ita quadrato essentialem esse, ut alteri etiam quantitati trinomiæ, quæ non sit quadratum, minime competat. Nam quantitas trinomia $a^3 : b + 2ab + b^3 : a$ non est quadratum, & tamen productum ex terminis extremis $a^3 : b$, & $b^3 : a$ adhuc æquale est quadrato termini medii dimidiati.

Id

Id vero mendum alicui videri potest, si quadratam radicem trinomiæ ejus quantitatis per radicales simplices extrahere velit. Inveniet enim, ejus quadratam radicem esse $a\sqrt{(a:b)}+b\sqrt{(b:a)}$, & consequenter ipsam quantitatem trinomiam $a^3:b+2ab+b^3:a$ quadratum esse. Sed consideret velim in eo, quod ibi tractatur, argumento, radicem quadratam non modo debere esse binomiam, verum etiam utrumque ejus terminum rationalem esse oportere. Unde, quod ibi dictum est, hoc sensu intelligi debet.

Et sane, si quantitas aliqua trinomia talis sit, ut quadratum unius termini dimidiati sit æquale producto aliorum terminorum, semper ejus quadrata radix per binomium aliquod poterit exhiberi. Pone enim $a+b+c$ esse quantitatem trinomiam, & quadratum ex $b:2$ æquale esse producto ac. Quia ergo habetur $ac=b^2:4$, erit $c=b^2:4a$; adeoque ipsa quantitas trinomia fiet $a+b+b^2:4a$, cujus quadrata radix erit binomium $\sqrt{a}+b:2\sqrt{a}$.

Hac interim occasione nolo hic reticere, quod eadem illa methodo, quæ ibidem explicatur, non modo dividere licebit æquationes quarti gradus in alias duas secundi, quum natura sua sunt subinde divisibiles; verum etiam obtineri poterit ipsarum resolutio, quum existunt in sede sua propria. Jam enim, ope ejus methodi, ex æquatione quarti gradus $x^4=qx^2+rx+s$ eruitur æquatio cubica $y^3+qy^2:2+sy+(qs:2-r^2:8)=0$. Itaque, invento valore incognitæ y in cubica ista æquatione, facile erit, utrumque eorum obtinere.

Nam primo, si valor ille oriatur rationalis, & ta-

& talis etiam, ut $q + 2y$ sit quadratum perfectum; æquatio non existet in sede sua propria, sed semper dividi poterit in duas alias, quæ ad secundum gradum ascendent. Deinde, si valor ille prodeat rationalis, sed talis quidem, ut $q + 2y$ non sit quadratum perfectum; æquatio existet in propria sua sede, sed immunis erit a cubica affectione. Ac denique, si idem ille valor oriatur radicalis; tunc æquatio, non modo reperietur in sede sua propria, sed cubicam quoque affectionem continebit.

In singulis autem casibus, addendum est $2yx^2 + y^2$ ad utramque partem æquationis $x^4 = qx^2 + rx + s$, & hinc inde quadrata radix extrahenda. Ita enim semper dividetur æquatio in duas alias secundi gradus. Verum, sicuti ipsarum coefficientes oriuntur rationales in primo; ita prodibunt expressi per radicales quadratas in secundo, & per radicales cubicas in tertio casu. Resolutione autem istarum æquationum, habebuntur radices quatuor ejus, de qua agitur, $x^4 = qx^2 + rx + s$.

Nec sane res aliter esse debet. Æquatio etenim cubica, quæ juxta vulgatam methodum derivatur ex ipsa $x^4 - qx^2 - rx - s = 0$ est $z^6 - 2qz^4 + (q^2 - 4s) z^2 - r^2 = 0$. Plane vero, si in æquatione ista loco z^2 scribatur $2y + q$, habebitur loco ejus hæc alia $8y^3 + 4qy^2 + 8sy + (4qs - r^2) = 0$: quæ, divisis terminis omnibus per 8, fiet $y^3 + qy^2 : 2 + sy + (qs : 2 - r^2 : 8) = 0$. Unde omnino necesse est, ut eadem ex utraque cubica æquatione consequantur.

Idem autem obtinet, quum æquatio quarti

ti gradus est $x^4 + px^3 = qx^2 + rx + s$, & ex ea, ope ejusdem methodi, derivatur æquatio cubica $y^3 + qy^2 : 2 + (s - pr : 4) y + (qs : 2 + p^2 s : 8 - r^2 : 8) = 0$. Nam, si valor incognitæ y oriatur rationalis, & talis, ut $q + p^2 : 4 + 2y$ sit quadratum perfectum; æquatio non existet in sede sua propria, sed in duas alias secundi gradus divisibilis erit. Quod si prodeat quidem rationalis, sed talis, ut $q + p^2 : q + 2y$ non sit quadratum perfectum; æquatio existet in propria sua sede, sed immunis erit a cubica affectione. Et denique, si idem ille valor emergat radicalis; tunc non modo existet æquatio in sede sua propria, sed cubicam quoque affectionem continebit.

Æquatio etenim cubica, quæ ex ipsa $x^4 + px^3 - qx^2 - rx - s = 0$ vulgata quidem methodo derivatur, est $z^6 - (2q - 3p^2 : 4) z^4 + (q^2 + p^2 q + 3p^4 : 16 - pr + 4s) z^2 - (r^2 + pqr - p^2 q^2 : 4 + p^3 r : 4 - p^4 q : 8 - p^6 : 64) = 0$. Si autem in æquatione ista loco z^2 scribatur $2y + p^2 : 4 + q$, habebitur loco ejus hæc alia $8y^3 + 4qy^2 + (8s - 2pr) y + (4qs + p^2 s - r^2) = 0$: quæ, divisis terminis omnibus per 8, reducitur ad priorem illam $y^3 + qy^2 : 2 + (s - pr : 4) y + (qs : 2 + p^2 s : 8 - r^2 : 8) = 0$. Unde plane necesse est, ut ex utraque cubica æquatione eadem consequantur. Quæ quum ita sint, eo magis commendanda hæc alia methodus, qua ex æquationibus quarti gradus cubicæ æquationes derivantur: quamquam ejus Auctor nec suam universalitatem, nec affinitatem cum vulgata methodo agnovisset.

FINIS.

Fig

